Cours de mathématiques
BTS SIO première année

Nicolas FRANCOIS
nicolas.francois@free.fr

24 mars 2012

CHAPITRE I

Numération

ARITHMÉTIQUE 1

Sommaire

I Introduction : que signifie 1789 ?

On a besoin, dans de nombreux domaines, de pouvoir exprimer des quantités. Pour dire qu'on a un troupeau de 252 moutons, on pourrait montrer une allumette par tête, ou tracer un bâton par tête, de manière à ne pas avoir à trimballer tout son troupeau, mais cela ne serait guère pratique[1].

Il a donc fallu, au cours du temps, inventer des méthodes plus efficaces pour représenter les quantités. L'arrivée des symboles a permis de représenter les nombres par des écritures plus ou moins faciles à manipuler : systèmes babylonien, égyptien, basés sur la représentation de certaines quantités par des symboles, et par mise bout-à-bout de ces symboles pour les autres nombres, système romain, dans lequel la position d'un symbole peut modifier la signification du symbole suivant...

Notre système de numération moderne est fondé sur plusieurs idées intéressantes : un symbole pour chacun des nombres de 0 à 9, en raison de l'utilisation de la base décimale, et un principe de *numération de position* : un même chiffre a une signification différente selon sa position dans l'écriture du nombre.

De nombreuses civilisations ont utilisé (et utilisent encore) la base 10, sans doute pour des raisons physiologiques ! Le système de notation positionnelle provient de Chine, et a été amélioré et diffusé à partir de l'Inde, au VI$^{\text{ème}}$ siècle. Enfin, les chiffres que nous utilisons aujourd'hui ont été inventé par les indiens, et leur diffusion en Europe s'est faite par l'intermédiaire de la civilisation arabe aux alentours du IX$^{\text{ème}}$ siècle.

Mais que signifie donc une écriture telle que 1789 ? Et bien, à chaque position est associée un “poids”, d'autant plus important que le chiffre est plus à gauche. Ce poids est une puissance de la base utilisée, ici la base 10. Ainsi :

$$\begin{aligned}1789 &= 9 \times 10^0 + 8 \times 10^1 + 7 \times 10^2 + 1 \times 10^3 \\ &= 9 + 80 + 700 + 1000\end{aligned}$$

Cette écriture est exceptionnellement économique en symboles, puisqu'on évite l'utilisation de symboles représentant 10, 100,... Elle permet surtout de réaliser efficacement les opérations dont nous avons le plus besoin dans la vie courante : *interprétation* d'une quantité, *comparaison* de deux quantités, *addition*, *soustraction*, *multiplication*[2]... Nous mettrons en œuvre ces méthodes en TP d'algorithmique lorsque nous programmerons les opérations usuelles sur des “grands” entiers.

II Les numérations de position

A Numération en base 10

Nous venons donc de voir le principe de la numération en base 10. Si un nombre entier s'écrit

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$$

où n est un entier supérieur ou égal à 1, les symboles a_i représentant des chiffres pris dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, alors la quantité qu'il représente est :

$$a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0 = \sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i$$

Le *poids* du chiffre a_k est 10^k, la puissance de 10 par laquelle il faut le multiplier pour connaître son influence dans le nombre. On remarquera que les chiffres dont le poids est le plus important (on parle des chiffres *les plus significatifs*) sont à gauche dans l'écriture du nombre. Ainsi, si l'on veut obtenir une bonne *approximation* d'un grand nombre, il suffit de ne conserver que les chiffres les plus à gauche, et de remplacer les autres par des 0 (pour conserver la signification des positions !).

B Numérations en base b

Si b est un entier supérieur ou égal à 2, on peut utiliser le principe ci-dessus pour représenter les nombres “en base b”.

[1]Par contre, ce système de représentation “une allumette pour un mouton” est extrêmement pratique pour additionner les nombres de moutons de deux troupeaux : il suffit de réunir les paquets d'allumettes de chaque troupeau !

[2]On ne va pas mettre dans cette liste la division, qui n'est quand même pas une opération si simple que cela, même si notre système de numération permet de concevoir un algorithme relativement efficace. Mais essayez de diviser deux nombres écrits en chiffres romains, pour voir !

Il faut pour cela une collection de symboles pour représenter tous les *chiffres* de 0 jusqu'à $b-1$. C'est facile lorsque b est inférieur ou égal à 10, puisqu'il suffit de prendre les chiffres usuels en ne gardant que ceux strictement inférieurs à b. Par contre, pour des bases supérieures à 10, il faut "inventer" de nouveaux "chiffres".

Ainsi, en base 16, les chiffres sont : $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$, le A étant le chiffre "10", B le chiffre 11, etc.

Une fois cette collection de symboles choisie, un nombre dont l'écriture en base b est

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$$

où n est un entier supérieur ou égal à 1, les symboles a_i représentant des chiffres de la base b, alors la quantité qu'il représente est :

$$a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + \dots a_2 \times b^2 + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0 = \sum_{i=0}^{n} a_i \times b^i \qquad (*)$$

Lorsqu'il peut y avoir une confusion entre plusieurs bases, on ajoute en indice à droite du nombre la base utilisée :

- 754_8 est un nombre écrit en base 8,
- 11101110010_2 est un nombre écrit en base 2...
- qui ne doit pas être confondu avec 11101110010_{10}, qui est une écriture en base 10.

En l'absence d'indice et de contexte, la base employée est la base décimale.

Lorsqu'on écrit un source en langage informatique, on utilise un préfixe ou un suffixe pour préciser la base employée :

- en Pascal, l'absence de notation indique la base 10, un préfixe $ indique un nombre hexadécimal, un % un nombre binaire, et un & un nombre octal (base 8) ; ainsi, $1AE représente le nombre hexadécimal $1AE_{16}$;
- en C, les préfixes $0x$ et $0b$ désignent respectivement des nombres écrits en hexadécimal ou en binaire.

Notons que la formule $(*)$ fournit une méthode pour convertir un nombre de la base b vers la base 10.

C Deux bases particulièrement utiles en informatique

1 La base 2, ou système binaire

C'est la plus petite base envisageable. Elle n'utilise que deux symboles, 0 et 1[3]. Un chiffre binaire est appelé "bit" en informatique, ce qui est une contraction de "binary digit", autrement dit "chiffre binaire" en anglais. Le poids du bit en position k est 2^k.

Voici la représentation des premiers entiers en binaire :

En base 10	En binaire
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010

En base 10	En binaire
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111
16	10000
17	10001
18	10010
19	10011
20	10100
21	10101

[3] ce qui tombe bien puisque l'électronique numérique sait représenter ces deux valeurs par deux plages de tensions différentes, de façon efficace. On pourrait imaginer un plus grand nombre de plages, mais le système deviendrait alors beaucoup plus sensible au *bruit*, sans gain réel d'efficacité.

Exemples :

- Le nombre 1110111_2 a pour valeur

$$1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 64 + 32 + 16 + 4 + 2 + 1 = 119$$

- Pour convertir le nombre 221 en base 2, on va chercher les puissances de 2 "entrant" dans ce nombre :
  - la plus grande puissance de 2 inférieure à 221 est $2^7 = 128$; le reste est $221 - 128 = 93$;
  - la plus grande puissance de 2 inférieure à 93 est $2^6 = 64$; le reste est $93 - 64 = 29$;
  - la plus grande puissance de 2 inférieure à 29 est $2^4 = 16$; le reste est $29 - 16 = 13$;
  - la plus grande puissance de 2 inférieure à 13 est $2^3 = 8$; le reste est $13 - 8 = 5$;
  - la plus grande puissance de 2 inférieure à 5 est $2^2 = 4$; le reste est $5 - 4 = 1 = 2^0$.

  Ainsi, $221_{10} = 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 11011101_2$.

Exercices :

a) Écrire les nombres 27, 31, 84 et 128 en binaire.

b) Donner la valeur des nombres dont l'écriture binaire est 110110_2, 111111_2 et 10101010_2.

2 La base 16, ou système hexadécimal

En base 16, on a vu que les "chiffres" sont $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$. Nous verrons par la suite l'intérêt de cette base, qui est un substitut plus "humain" du binaire pour "communiquer" avec le microprocesseur d'un ordinateur.

Voici la représentation des premiers entiers en hexadécimal :

En base 10	En hexadécimal
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	A

En base 10	En hexadécimal
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F
16	10
17	11
18	12
19	13
20	14
21	15

Exercices :

a) Écrire les nombres 27, 31, 84 et 128 en hexadécimal.

b) Donner la valeur des nombres dont l'écriture hexadécimale est 83_{16}, $A1_{16}$, FF_{16} et $A10E_{16}$.

III Conversions, changements de bases

A Conversion de la base b à la base décimale

On a déjà vu la méthode permettant de convertir un nombre écrit en base b en décimal : c'est la relation $(*)$ ci-dessus.

B Conversion de la base décimale à la base b

Pour convertir un nombre α écrit en base 10 en son écriture en base b, on effectue des divisions euclidiennes successives. la première donne :

$$(1) \quad \alpha = bq_0 + a_0$$

avec $0 \leqslant a_0 < b$. Recommençons en divisant le quotient q_0 par b :

$$(2)\ \ q_0 = bq_1 + a_1$$

En reportant (2) dans (1), on obtient :

$$(3)\ \ \alpha = b\left(bq_1 + a_1\right) + a_0 = q_1 b^2 + a_1 b + a_0$$

Continuons en divisant q_1 par b : $q_1 = bq_2 + a_2$, ce qui donne, en reportant dans (3) :

$$\alpha = b^2\left(bq_2 + a_2\right) + a_1 b + a_0 = q_2 b^3 + q_1 b^2 + a_1 b + a_0$$

En continuant les divisions jusqu'à obtenir un quotient nul, on arrive à une égalité du type :

$$\alpha = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

Ainsi, l'écriture en base b de α est :

$$\alpha = \left(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0\right)_b$$

Le principe est donc d'écrire les restes successifs obtenus, de la droite vers la gauche.

Exemple : À titre d'exemple, convertissons 259_{10} en base 3 :

- $259 = 86 \times 3 + 1$,
- $86 = 28 \times 3 + 2$,
- $28 = 9 \times 3 + 1$,
- $9 = 3 \times 3 + 0$,
- $3 = 1 \times 3 + 0$,
- $1 = 0 \times 3 + 1$

Après cette succession de divisions, on relit les restes dans l'ordre inverse : $259_{10} = 100121_3$.

Exercice : Reprendre les conversions de la partie précédente en utilisant cette méthode, et comparer les deux méthodes.

C Conversion directe entre binaire et hexadécimal

On a signalé l'intérêt principal de l'hexadécimal pour manipuler des nombres binaires. On peut bien sûr passer par la base 10, mais il y a un moyen beaucoup plus rapide. Expliquons cela.

Une division (entière) par 16 en binaire revient à effectuer un décalage de quatre bits vers la droite. Ainsi, chaque paquet de quatre bits correspond à un chiffre hexadécimal. Il suffit donc de connaître l'équivalence entre les nombres de quatre bits en binaire et les "chiffres" hexadécimaux pour obtenir une conversion immédiate.

Binaire	Hexadécimal
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7

Binaire	Hexadécimal
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

Exemples :

- Convertissons le nombre binaire 101111110110110 en hexadécimal. Pour cela, on commence par découper le nombre en "paquets" de 4 bits à partir de la droite, en complétant éventuellement le dernier paquet pour obtenir un bloc complet de 4 bits, puis on écrit en dessous le chiffre hexadécimal correspondant :

0101	1111	1011	0110
5	F	B	6

Ainsi, $101111110110110_2 = 5FB6_{16}$.

- Convertissons maintenant le nombre hexadécimal $FEC5$ en binaire. Il suffit pour cela d'écrire en dessous de chaque chiffre hexadécimal sa correspondance en binaire :

F	E	C	5
1111	1110	1100	0101

Ainsi, $FEC5_{16} = 1111111011000101_2$.

IV Annexe : représentation informatique des nombres

Remarque : cette section ne fait pas partie du programme, et doit être considérée comme uniquement culturelle !

L'unité élémentaire de l'ordinateur est le bit. Mais par soucis d'efficacité et de rapidité de traitement, les microprocesseurs modernes manipulent des mots constitués de plusieurs bits. Le premier microprocesseur commercialisé, l'Intel 4004, utilisait des mots de 4 bits. Puis vinrent les microprocesseurs 8 bits : le Z80, l'Intel 8080, le MOS 6502...

De nos jours, les microprocesseurs modernes manipulent des mots de 32 bits, voire de 64 bits pour les plus récents. On remarque que ce sont toujours des puissances de 2, et surtout des multiples de 8. Un mot de 8 bits est appelé un *octet*.

Bien entendu, on ne peut pas se contenter des nombres manipulables par le microprocesseur. On a parfois besoin de plus ou moins de précision. Les langages informatiques fournissent des types plus ou moins standards.

A Les entiers non signés

Les entiers non signés sont simplement codés sous forme de blocs de bits (ou plutôt d'octets), en binaire :

- si l'on manipule des entiers codés sur un octet (soit sur 8 bits), on peut coder les entiers de 0 jusqu'à 255 ;
- si l'on manipule des entiers codés sur deux octets (soit sur 16 bits), on peut coder les entiers de 0 jusqu'à 65535 ;
- si l'on manipule des entiers codés sur quatre octets (soit sur 32 bits), on peut coder les entiers de 0 jusqu'à 4 294 967 296.

Si l'on demande à un microprocesseurs d'ajouter 1 au plus grand entier codable, il renvoie[4]... 0 ! Attention donc aux *dépassements de capacité*.

Une règle utile pour obtenir rapidement une bonne approximation de la valeur d'une puissance de 2 : comme $2^{10} = 1024$ est très proche de $1000 = 10^3$, on a par exemple :

$$2^{32} = 2^{3\times 10+2} = \left(2^{10}\right)^3 \times 2^2 \approx \left(10^3\right)^3 \times 4 = 4 \times 10^9$$

soit approximativement 4 milliards[5].

B Les entiers signés

On a beaucoup plus souvent besoin de coder des entiers *signés*, pour représenter les entiers relatifs (ce qui n'empêche d'ailleurs pas de ne manipuler que des entiers positifs !). Pour cela, on consacre un bit (en général, le bit de poids le plus fort) au signe. Mais pour des raisons pratiques, on utilise un codage un peu spécial pour les entiers négatifs.

[4] et positionne un *bit de dépassement*, ou *"overflow"*, à 1, encore faut-il bénéficier de cette information et l'utiliser !

[5] D'autres approximations utiles, au passage : une année représente environ 31 millions de secondes, et un milliard de secondes représente environ 32 ans. Ce genre d'approximations permet de déterminer rapidement si un programme va terminer son calcul rapidement, ou bien tourner jusqu'à la fin de l'univers, qui devrait se produire dans environ 15 milliards d'années, soit à peu près un demi-milliard de milliards de secondes !

- Les entiers positifs sont simplement codés comme les entiers non signés, le bit de poids le plus fort étant positionné à 0. Si l'on dispose de n bits, le plus grand entier positif représentable est donc $2^{n-1} - 1$, codé $0111\ldots111$.

- On pourrait coder les entiers négatifs de la même manière, mais cela rendrait l'algorithme d'addition de deux entiers signés plus complexe à implémenter dans le microprocesseur. On utilise donc un codage moins lisible pour un humain, mais plus efficace pour les calculs : le *complément à* 2.

  Pour cela, on prend le codage binaire de l'opposé du nombre, on inverse tous les bits (les 1 deviennent des 0 et vice-versa, on dit qu'on effectue un *complément à* 1), et on ajoute 1 au résultat.

EXEMPLES :

- Le nombre 9924 est codé sur deux octets sous la forme 0010011011000100.

- Pour coder le nombre −9924 en complément à 2 sur deux octets, on inverse tous les bits, et on ajoute 1 :

9924 =	0010	0110	1100	0100
complément à 1	1101	1001	0011	1011
on ajoute 1+	0000	0000	0000	0001
−9924 =	1101	1001	0011	1100

Remarquons que ce système est cohérent avec ce qu'on a signalé tout à l'heure : si l'on ajoute 1 au plus "grand" nombre représentable, on obtient 0 :

$$0000\,0000\,0000\,0001 + 1111\,1111\,1111\,1111 = 0000\,0000\,0000\,0000$$

Ainsi, 1111 1111 1111 1111 doit être la représentation binaire de -1, ce qu'on peut facilement vérifier en reprenant la méthode de complément à 2.

Une soustraction de deux nombres a et b en binaire consiste donc à remplacer b par son complément à 2 b', et à calculer la somme $a + b'$.

C Les nombres en virgule flottante

Ces nombres seront vus en détail l'an prochain.

Feuille d'exercices n°1 – numération

1) **Conversion de la base b vers la base 10**

a) *De la base* 2 *vers la base* 10
Convertir en base 10 les nombres suivants :

$$A = 101001_{(2)} \qquad B = 10110011_{(2)} \qquad C = 1100101_{(2)} \qquad D = 100010111_{(2)}$$

b) *De la base* 7 *vers la base* 10
Convertir en base 10 les nombres suivants :

$$E = 36_{(7)} \qquad F = 435_{(7)} \qquad G = 6610_{(7)}$$

c) *De la base* 16 *vers la base* 10 Convertir en base 10 les nombres suivants :

$$H = 81A_{(16)} \qquad I = 20BF3_{(16)} \qquad J = C0039_{(16)} \qquad K = ABCD_{(16)} \qquad L = E3F5_{(16)}$$

2) **Conversion de la base 10 vers la base b**

Dans ces exercices, on utilisera les deux méthodes exposées dans le cours, et on en comparera l'efficacité.

a) *De la base* 10 *vers la base* 2
Donner l'écriture en base 2 des nombres suivants :

$$M = 19_{(10)} \qquad N = 31_{(10)} \qquad O = 256_{(10)} \qquad P = 729_{(10)}$$

b) *De la base* 10 *vers la base* 3
Donner l'écriture en base 3 des nombres suivants :

$$Q = 18_{(10)} \qquad R = 76_{(10)} \qquad S = 729_{(10)}$$

c) *De la base* 10 *vers la base* 16 Donner l'écriture en base 16 des nombres suivants :

$$T = 70_{(10)} \qquad U = 471_{(10)} \qquad V = 718_{(10)} \qquad W = 51727_{(10)}$$

3) **Conversion binaire-hexadécimal**

Dans ces exercices, on passera directement d'une base à l'autre *sans passer par la base* 10.

a) *Du binaire vers l'hexadécimal*
Donner l'écriture en base 16 des nombres suivants :

$$X = 101101_{(2)} \qquad Y = 101101011110_{(2)} \qquad Z = 100111001110111_{(2)}$$

b) *De l'hexadécimal vers le binaire*
Donner l'écriture en base 2 des nombres suivants :

$$A' = 24D_{(16)} \qquad B' = 70EC_{(16)} \qquad C' = 8BA_{(16)} \qquad D' = EF36_{(10)}$$

4) **Opérations en binaire**

Dans cet exercice, tous les nombres donnés sont en base 2. On calculera directement en binaire, puis on vérifiera le résultat en convertissant en base 10.

a) *addition*
Calculer :

$$E' = 1011 + 101 \qquad F' = 1010101010111001 + 1111011011011110$$

b) *soustraction*
Calculer : $G' = 11001101 - 1001011$.

c) *multiplication ou division par une puissance de* 2
Calculer le produit H' de $11000_{(2)}$ par $8_{(10)}$, puis le quotient I' de $111011101_{(2)}$ par $32_{(10)}$.

d) *multiplication ou division par un nombre quelconque*

- Calculer les produits :

$$J' = 11000 * 11 \qquad\qquad K' = 11011101 * 11110011$$

- Calculer le quotient : $L' = 11110100/1101$.

e) **Débordements ?**

- Si l'on effectue le calcul de F' sur un microprocesseur dont les registres ont 16 bits, que se passe-t-il ?
- Pour additionner entre eux deux nombres de 16 bits, un microprocesseur "16 bits" suffit-il ?
- Pour multiplier entre eux deux nombres de 16 bits, de quel genre de microprocesseur a-t-on besoin ?
- À votre avis, comment faisaient les ingénieurs pour faire des calculs sur des "grands" nombres lorsque les microprocesseurs n'avaient que des registres sur 8 bits ?

5) **Bonus : opérations en complément à** 2

a) *conversion*

(i) Comment sont représentés 0, $1_{(10)}$, $-1_{(10)}$ en complément à 2 sur 8 bits ? Dans ce système, quel sont le plus grand et le plus petit nombres qu'on peut coder ?
(ii) Convertir $83_{(10)}$ et $-107_{(10)}$ en complément à 2 sur 8 bits, puis sur 16 bits.
(iii) Quels entiers sont codés 01110110 et 10110110 en complément à 2 sur 8 bits ?
(iv) Quel est le complément à 2 sur 8 bits de -128 ?

b) *addition*
Calculer $1 + (-1)$, puis $-32 + 43$, puis $-43 + 32$ en complément à 2 sur 8 bits, avant de convertir le résultat en décimal.

c) *soustraction*
Comment soustraire deux nombres en complément à 2 ? Calculer $103 - 87$ en passant en binaire.

d) *multiplication*
Voici une méthode pour effectuer le produit de deux nombres codés en complément à 2, extraite de la page Wikipédia anglaise sur le complément à 2 :

> The product of two n-bit numbers requires $2n$ bits to contain all possible values. If the precision of the two two's-complement operands is doubled before the multiplication, direct multiplication (discarding any excess bits beyond that precision) will provide the correct result. For example, take $6 \times (-5) = -30$. First, the precision is extended from 4 bits to 8. Then the numbers are multiplied, discarding the bits beyond 8 (shown by 'x'):

```
   00000110  (6)
 x 11111011  (-5)
 ==========
        110
       110
      000
     110
    110
   110
  x10
 xx0
 ==========
 xx11100010  (-30)
```

Sur ce modèle, calculer le produit de -15 et -14, puis le produit de 132 et -223.

CHAPITRE II

Calcul des propositions

LOGIQUE 1

Sommaire

I Propositions, valeurs de vérité

A Définition

Une *proposition* est une expression bien formée, du point de vue d'un certain langage, à laquelle est affectée clairement, par un ordinateur ou une communauté de personnes, une valeur de vérité, notée soit V, `true` ou 1 pour indiquer qu'elle est vraie, soit F, `false` ou 0 pour indiquer qu'elle est fausse[1].

B Exemples

"Schtroumph", "il pleuvra demain", "les femmes sont supérieures aux hommes" ne sont pas des propositions françaises (la première n'est pas correctement formée selon les règles de syntaxe et de grammaire, et on ne peut donner de valeur de vérité aux deux suivantes, la seconde parce qu'on ne sait pas prédire l'avenir météorologique avec certitude, et je vous laisse le soin de découvrir pourquoi la dernière n'en est pas une.

Par contre, "Nancy est en Meurthe-et-Moselle" est une proposition française dont la valeur de vérité est V.

"$3 > \pi$" et "$2 + 3 = 5$" sont des propositions mathématiques dont la valeur de vérité est F pour la première, V pour la seconde. Par contre, "$4 + 5$" et "$x = 3$" n'en sont pas : $4 + 5$ est un terme, et $x = 3$ est une équation.

Dans le langage Pascal, "`8>2`" et "`2*3=0`" sont des propositions valant respectivement `true` et `false` et, si la variable `x` est préalablement déclarée,"`x=3`" est une proposition valant `true` lorsque x contient 3 mais valant `false` lorsque x contient 2 et valant je ne sais pas quoi si le programmeur a oublié d'initialiser la variable `x`[2]. Par contre, "`x:=3`" n'est pas une proposition, mais une *instruction* d'affectation, auquel il n'est pas possible de donner une valeur de vérité.

Les propositions (encore appelées conditions) sont surtout utilisées en Pascal à l'intérieur des structures de contrôle suivantes:

- **If** <*condition*> **then** <instruction>**;**
- **If** <*condition*> **then** <instruction1> **else** <instruction2>**;**
- **While** <*conditionpourcontinuer*> **do** <instruction>**;**
- **repeat** <instructions> **until** <*conditionarrêt*>**;**

II Connecteurs logiques

À partir de propositions P, Q, R... on peut en construire d'autres dont la valeur de vérité ne dépend que de celles des propositions initiales. On décrit de telles constructions à l'aide de *tables de vérités*, qui donnent, en fonction des valeurs de vérités des propositions initiales, la valeur de vérité de la construction.

A Négation d'une proposition

En mathématiques $\neg P$ se lit "non P" et peut aussi se désigner par $\overline{P}$.

La négation est un connecteur logique unaire défini par la table de vérité:

P	$\neg P$
0	1
1	0

Autrement dit $\neg P$ vaut V ssi P vaut F.

En Pascal, il s'exprime avec l'opérateur "*not*" comme dans l'instruction : "**if not**(i=0) **then** dosomething**;**".

Remarquons que, pour toute proposition P, $\neg\neg P$ ou encore $\overline{\overline{P}}$ a la même valeur que P :

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
0	1	0
1	0	1

B Équivalence de deux propositions

En mathématiques $P \Leftrightarrow Q$ se lit "P équivaut à Q".

L'équivalence est un connecteur logique binaire défini par la table de vérité :

[1] Tout dépendant du contexte : on utilisera V et F dans le langage courant, `true` et `false` en informatique, un ordinateur quant-à lui codera plutôt 0 ou 1, sachant que dans certains langages, un entier non nul a pour valeur de vérité 1, zéro ayant pour valeur de vérité 0.

[2] ce qu'en général le programme oubliera de préciser, choisissant entre `true` et `false` à partir du contenu de l'emplacement mémoire que le compilateur aura affecté à x. Notons quand même que la plupart des compilateurs modernes analyse le code source de manière à détecter des variables non initialisées avant leur utilisation. Mais ces mécanismes ne sont pas infaillibles !

Autrement dit $P \Leftrightarrow Q$ vaut V si et seulement si P et Q ont la même valeur.

D'après le paragraphe précédent, pour toute proposition P, $(\neg\neg P \Leftrightarrow P)$ vaut vrai.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Une proposition qui est vraie quelle que soit la valeur de vérité de ses composants est une *tautologie.*

En Pascal, l'équivalence s'exprime avec l'opérateur "=" comme dans l'instruction :

"**if** (i=0)=(j=0) **then** dosomething**;**"

mais attention à ne pas confondre cette égalité avec l'égalité numérique[3] !

Exercice : Quels sont, en fonction du contenu des variables i et j, les cas où l'instruction "dosomething" est exécutée ?

C Conjonction

La conjonction est un connecteur logique binaire défini par la table de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Autrement dit $P \wedge Q$ vaut V si et seulement si P et Q valent tous les deux V. Remarquons au passage que si on attribue les valeurs 0 et 1 à F et F, $P \wedge Q$ est le *minimum* de P et Q.

En mathématiques $P \wedge Q$ se lit "P et Q".

En Pascal, il s'exprime avec l'opérateur "`and`" comme dans l'instruction :

"**if** (i=0)**and**(j=0) **then** dosomething**;**".

Attention à ne pas taper "textbfif i=0 **and** j=0 **then** dosomething**;**" car, les règles de priorité ayant été mal choisies, le compilateur tentera des calculs farfelus et finira par un message d'erreur.

Exercices :

- Compléter la table de vérité suivante et vérifier ainsi que $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$ est une tautologie signifiant que la conjonction est commutative :

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \wedge P$	$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

- Comparer les deux instructions Pascal suivantes :

  - **If** (nbfacture<>0) **and** (nbimpaye/nbfacture<=0.05) **then** traiterbonclient**;**
  - **If** (nbimpaye/nbfacture<=0.05) **and** (nbfacture<>0) **then** traiterbonclient**;**

  On suppose que le compilateur Pascal est configuré pour évaluer systématiquement les deux propositions P et Q pour évaluer la proposition P *and* Q. Modifier la deuxième instruction pour qu'elle s'execute correctement.

D Disjonction

La disjonction est un connecteur logique binaire défini par la table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

En mathématiques $P \vee Q$ se lit "P ou Q".

$P \vee Q$ vaut V si et seulement si l'une au moins des propositions P ou Q vaut V. Remarquons au passage que si on attribue les valeurs 0 et 1 à F et F, $P \wedge Q$ est le *minimum* de P et Q.

Attention au fait qu'il s'agit du "ou" inclusif car il n'est pas interdit que les deux propositions soient vraies. En français le "ou" peut-être inclusif comme dans la phrase : "Une entreprise recherche un stagiaire parlant anglais ou espagnol ". Il est parfois exclusif comme dans la phrase : "ce soir je vais au cinéma ou au théâtre". Il peut avoir aussi le sens d'une implication, comme dans la phrase : "mange ta soupe ou tu seras privé de dessert".

En Pascal, la disjonction s'exprime avec l'opérateur "`or`" comme dans l'instruction :

[3] En fait c'est simplement l'égalité logique de deux booléens, nous en reparlerons lorsque nous aborderons la notion d'*algèbre de Boole.*

"**if** (i=0)**or**(j=0) **then** dosomething;".

Attention à ne pas taper "**if** i=0 **or** j=0 **then** dosomething;" car, les règles de priorité ayant été mal choisies, le compilateur tentera des calculs farfelus et finira par un message d'erreur.

EXERCICES :

- Compléter la table de vérité suivante et vérifier ainsi que $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$ est une tautologie signifiant que la disjonction est commutative :

P	Q	$P \vee Q$	$Q \vee P$	$(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

- Comparer les deux instructions Pascal suivantes:

  - **If** (nbfacture=0)**or** (nbimpaye/nbfacture>0.05) **then** traitermauvaisclient **;**
  - **If** (nbimpaye/nbfacture>0.05) or (nbfacture=0) **then** traitermauvaisclient**;**

  On suppose que le compilateur Pascal est configuré pour évaluer systématiquement les deux propositions P et Q pour évaluer la proposition P or Q. Modifier la première instruction pour qu'elle s'exécute correctement.

- Compléter la table de vérité suivante et vérifier ainsi que $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ est une tautologie signifiant que la conjonction est distributive par rapport à la disjonction :

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
0	0							
0	1							
1	0							
1	1							

- Construire une table de vérité pour vérifier que $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ est une tautologie signifiant que la disjonction est distributive par rapport à la conjonction.

On verra plus tard qu'on peut construire n'importe quelle formule logique avec seulement la négation, la conjonction et la disjonction. Ces trois connecteurs sont donc particulièrement importants[4].

E Implication

L'implication est un connecteur logique binaire défini par la table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

En mathématiques $P \Rightarrow Q$ se lit "P implique Q".

Autrement dit $P \Rightarrow Q$ vaut V si et seulement si Q vaut V *lorsque P vaut V*. Remarquez que la valeur de Q n'a pas d'influence lorsque P est faux. Par exemple la phrase "Quand les poules auront des dents je serai ministre de l'Éducation" est parfaitement vraie car pour me contredire il faudrait que les poules aient des dents et que je ne sois pas ministre !

De la même façon, il faut bien faire attention au fait que l'implication $P \Longrightarrow Q$ *ne dit absolument rien sur la valeur de vérité de P*. En particulier, si P est fausse, alors l'implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie, quelle que soit la valeur de vérité de Q. Ainsi, "si $4 < 0$, alors $1 = 2$" est une implication vraie, de même que "si $1 = 2$, alors $4 > 0$". Cela conduit à la constatation suivante : du faux, on peut déduire n'importe quoi.

On confond souvent l'implication avec une relation de causalité : le fait que $P \Longrightarrow Q$ est vraie serait compris comme entraînant que Q *découle de* P. Il n'en est rien en logique pure. Par contre, une sorte de réciproque de ce raisonnement est vraie : on l'appelle **"règle d'inférence"**, ou "modus ponens" : pour toutes propositions P et Q, on a

$$(P \wedge (P \Longrightarrow Q)) \Longrightarrow Q$$

[4] Les règles de De Morgan nous permettront même de nous contenter de deux connecteurs, et on verra en TD un connecteur qui peut réaliser cette prouesse tout seul !

Autrement dit, si P est vraie, et si $P \Longrightarrow Q$ est vraie, alors Q est vraie. La véracité de Q devient une conséquence de la véracité de P, et du "théorème" «si P, alors Q».

En Pascal, l'implication peut s'exprimer avec l'opérateur d'inégalité "<=" (il y a de quoi se s'embrouiller !) comme dans l'instruction :

"**if** (x=0)<=(y<>0) **then** z:=1/(x*x+y*y)**;**". Il est sans doute préférable d'écrire :

"**if** (x<>0)**or**(y<>0) **then** z:=1/(x*x+y*y)**;**".

Exercices :

- Construire une table de vérité pour vérifier que $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ est une tautologie.
- Construire une table de vérité pour vérifier que $\neg (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$ est une tautologie.
- Construire une table de vérité pour vérifier que $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$ est une tautologie.
- Construire une table de vérité pour vérifier que $P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ est une tautologie.

La contraposée de la phrase "s'il y a crime, il y a châtiment" est "s'il n'y a pas de châtiment, il n'y a pas de crime". Bref il n'y a pas de crime sans châtiment. Mais attention il peut y avoir châtiment sans crime !

La contraposée de la phrase "si je suis lorrain, je suis français" est "si je ne suis pas français, je ne suis pas lorrain". Bref il n'y pas de lorrain qui ne soit pas français. Mais attention il peut y avoir des français qui ne soient pas lorrains.

Exercices :

- Construire une table de vérité pour vérifier que $(L \Rightarrow F) \Leftrightarrow (\neg F \Rightarrow \neg L)$ est une tautologie. $\neg F \Rightarrow \neg L$ est appelée *l'implication contraposée* de l'implication $L \Rightarrow F$
- Construire une table de vérité pour vérifier que $(L \Rightarrow F) \Leftrightarrow \neg (L \wedge \neg F)$ est une tautologie.
- Construire une table de vérité pour vérifier que $(L \Rightarrow F) \Leftrightarrow \neg (F \wedge \neg L)$ n'est pas une tautologie.
- Construire une table de vérité pour vérifier que $(L \Rightarrow F) \Leftrightarrow (\neg L \Rightarrow \neg F)$ n'est pas une tautologie.

III Propriétés des connecteurs logiques

A Commutativité et associativité de $\vee$ et $\wedge$

1 Commutativité

Les phrases "il fait beau et chaud" et "il fait chaud et beau" sont équivalentes, de même que les phrases "il fait beau ou chaud" et "il fait chaud ou beau".

Plus généralement, pour toutes propositions P et Q,

$$\boxed{(P \vee Q) \iff (Q \vee P)} \quad \text{et} \quad \boxed{(P \wedge Q) \iff (Q \wedge P)}$$

La démonstration de ces deux tautologies se fait simplement en constatant que les tables de vérité ne changent pas lorsqu'on permute leurs deux premières colonnes.

2 Associativité

Lorsqu'on rencontre une expression de la forme $P \wedge Q \wedge R$, qu'on peut interpréter d'au moins deux façons différentes : on peut d'abord calculer $U = P \wedge Q$, puis calculer $U \wedge R$, ou bien calculer d'abord $V = Q \wedge R$, puis calculer $P \wedge V$.

L'associativité des relations $\wedge$ et $\vee$ nous apprend que l'ordre n'est pas important : plus précisément, pour toutes propositions P, Q et R,

$$\boxed{(P \vee Q) \vee R \iff P \vee (Q \vee R)} \quad \text{et} \quad \boxed{(P \wedge Q) \wedge R \iff P \wedge (Q \wedge R)}$$

Ces deux propriétés permettent de calculer une expression de la forme $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n$ de n'importe quelle façon : échanger la position des propositions, et commencer par n'importe quel connecteur.

B Double distributivité

Si on vous “pour entrer dans le château, ouvrez la porte en bois, et la porte de gauche ou celle de droite”, vous avez deux façons d’entrer dans le château : ouvrir la porte en bois et la porte de gauche, ou bien ouvrir la porte en bois et la porte de droite.

Ceci provient des tautologies suivantes : pour toutes propositions P, Q et R :

$$P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \quad \text{et} \quad P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

Ces relations peuvent être vues comme des relations de distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$, et de $\wedge$ par rapport à $\vee$, de la même façon que la multiplication est distributive par rapport à l’addition.

C Élément neutre

Soit $\mathcal{V}$ une proposition vraie, et $\mathcal{F}$ une proposition fausse. Alors, pour toute proposition P :

$$\boxed{P \wedge \mathcal{V} = \mathcal{P}} \qquad \boxed{P \wedge \mathcal{F} = \mathcal{F}} \qquad \boxed{P \vee \mathcal{V} = \mathcal{V}} \qquad \boxed{P \vee \mathcal{F} = \mathcal{P}}$$

On dit que $\mathcal{V}$ est *l’élément neutre* du connecteur $\wedge$, et *l’élément absorbant* du connecteur $\vee$.

Exercices :

- Énoncez une phrase similaire pour $\mathcal{F}$.
- Démontrez ces affirmations.

D Loi de De Morgan

La négation de “il faut beau et chaud” n’est pas “il faut moche et froid”[5] mais “il faut moche **ou** froid”.

Les lois de De Morgan établissent ces tautologies :

$$\boxed{\neg (P \wedge Q) \iff (\neg P \vee \neg Q)} \quad \text{et} \quad \boxed{\neg (PQ) \vee \iff (\neg P \wedge \neg Q)}$$

Exercices :

- Vérifiez ces tautologies à l’aide de tables de vérité.
- Quel est la négation de la phrase “il est beau, riche et intelligent” ?
- Expliquer comment on peut éliminer toutes les conjonctions d’une formule logique. On peut ainsi ne l’écrire qu’avec deux connecteurs : la négation et la disjonction.

E Principe de dualité

Les lois de De Morgan ont une conséquence bien pratique : le principe de dualité. Ce principe permet, à partir d’une identité logique (une tautologie), d’en construire une autre. Pour cela, il suffit d’échanger les rôles de $\vee$ et $\wedge$ d’une part, et de V et F d’autre part.

Par exemple, à partir de la distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$:

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

on déduit l’*identité duale* :

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

qui exprime la distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$. Bien pratique pour limiter le travail de démonstration !

[5] ni “il fait chaud et beau”, bien entendu !!!

Feuille d'exercices n°2 – calcul des propositions

1) **Simplifications**

   a) Établir la table de vérité de la proposition suivante : $(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow (P \vee Q)$.
   À quelle proposition plus simple cette proposition est-elle équivalente ?

   b) Mêmes questions avec $(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow (P \wedge Q)$.

   c) Essayez de simplifier ces propositions à l'aide des seules propriétés des connecteurs énoncées dans le cours.

2) **Propriétés de consensus**

   a) À l'aide d'une table de vérité, établir la propriété : $(P \vee (\neg P \wedge Q)) \iff P \vee Q$.
   Pourquoi cette propriété s'appelle "propriété de consensus" ?

   b) À l'aide du principe de dualité, établir une deuxième propriété de consensus.

3) **Simplifications bis**

   a) Établir la table de vérité de la proposition suivante : $((\neg P \wedge Q) \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge (\neg Q \wedge \neg R))$.
   À quelle proposition plus simple cette proposition est-elle équivalente ?

   b) Essayez de simplifier cette propositions à l'aide des seules propriétés des connecteurs énoncées dans le cours.

4) **Équivalence**

   a) P, Q et R étant des propositions quelconques, établir la table de vérité de chacune des propositions suivantes :
      - $(P \wedge Q) \Longrightarrow R$,
      - $(P \Longrightarrow R) \wedge (Q \Longrightarrow R)$,
      - $(P \Longrightarrow R) \vee (Q \Longrightarrow R)$.

   b) En déduire l'équivalence de deux de ces trois propositions.

5) **Implication**

   a) i. Parmi les sept implications $P \Longrightarrow \neg Q$, $\neg P \Longrightarrow Q$, $\neg P \Longrightarrow \neg Q$, $Q \Longrightarrow P$, $Q \Longrightarrow \neg P$, $\neg Q \Longrightarrow P$ et $\neg Q \Longrightarrow \neg P$, une est équivalente à $P \Longrightarrow Q$. Laquelle ?
      ii. Quelle phrase est logiquement équivalente à : « s'il pleut, alors il y a des nuages » ?

   b) i. La négation de l'implication $P \Longrightarrow Q$ est-elle une implication ?
      ii. Montrer que l'implication $P \Longrightarrow Q$ est équivalente à $\neg P \vee Q$.
      iii. Traduire sous forme d'une implication la phrase : « s'il est français, alors il aime le beaujolais », puis en donner la négation.

   c) Un professeur de logique dit à l'un de ses élèves : « si vous ne faites pas le travail demandé, vous serez sanctionné ». L'élève fait le travail demandé, mais est quand même sanctionné.
   Quelle erreur de logique a fait l'élève en pensant ne pas être sanctionné ?

6) **Associativité de $\Longrightarrow$ et $\iff$**

   a) En établissant leurs tables de vérité, montrer que les propositions $P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)$ et $(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow R$ ne sont pas équivalentes.

   b) Les propositions $P \iff (Q \iff R)$ et $(P \iff Q) \iff R$ sont-elles équivalentes ?

7) **Propriétés d'absorption**

   a) À l'aide d'une table de vérité, établir la première propriété d'absorption : $(P \vee (P \wedge Q)) \iff P$.

   b) À l'aide du principe de dualité, établir une deuxième propriété d'absorption.

8) **Deux connecteurs suffisent !**

   a) Déterminer une proposition équivalente à $P \wedge Q$ qui ne comporte que les connecteurs $\neg$ et $\vee$.

   b) Déterminer une proposition équivalente à $P \Longrightarrow Q$ qui ne comporte que les connecteurs $\neg$ et $\vee$.

c) En déduire une proposition équivalente à $P \iff Q$ qui ne comporte que les connecteurs $\neg$ et $\vee$.

9) **Les connecteur “nand” et “nor”**

a) *Le connecteur “nand” de Sheffer*

La barre de Sheffer est le connecteur binaire qui, à toutes propositions P et Q, associe la proposition, notée $P|Q$, équivalente à $\neg(P \wedge Q)$.

Ce connecteur est aussi appelé « nand », contraction de « no and », c'est-à-dire « non et ».

i. Établir la table de vérité de $P|Q$.

ii. Établir que pour toute proposition P, $\neg P \iff P|P$.

iii. Déduire de la définition de $P|Q$ et du résultat précédent une proposition équivalente à $P \wedge Q$ dans laquelle seul le connecteur $|$ apparaît.

iv. Démontrer, à l'aide des lois de De Morgan, que, pour toutes propositions P et Q, $P \vee Q \iff ((P|P)\,|\,(Q|Q))$.
Ainsi, tous les connecteurs binaires peuvent être obtenus à l'aide du seul connecteur « nand ».

v. Le connecteur « nand » est-il commutatif ? Associatif ? Admet-il un élément neutre ?

b) *Le connecteur “nor” de Peirce*

Le connecteur de Peirce est le connecteur binaire qui, à toutes propositions P et Q, associe la proposition, notée $P \downarrow Q$, équivalente à $\neg(P \vee Q)$.

Ce connecteur est aussi appelé « nor », contraction de « no or », c'est-à-dire « non ou ».

i. P étant une proposition quelconque, déterminer une proposition équivalent à $\neg P$ dans laquelle seul le connecteur $\downarrow$ apparaît.

ii. P et Q étant deux propositions quelconque, déterminer une proposition équivalent à $P \vee Q$ dans laquelle seul le connecteur $\downarrow$ apparaît.
Reprendre la question en remplaçant $\vee$ par $\wedge$.
Ainsi, tous les connecteurs binaires peuvent être obtenus à l'aide du seul connecteur « nor ».

iii. Le connecteur « nor » est-il commutatif ? Associatif ? Admet-il un élément neutre ?

c) P, Q et R étant des propositions quelconques, établir la table de vérité de chacune des propositions $P \downarrow (Q|R)$ et $(P \downarrow Q)\,|\,(P \downarrow R)$.
Ces deux propositions sont-elles équivalentes ?

d) Même question en permutant $|$ et $\downarrow$.

10) **Le test de sélection de cartes de Wason**

a) On met quatre cartes devant vous. Chaque carte a une lettre d'un côté, un nombre de l'autre. Certaines sont placées côté lettre, d'autre côté nombre. Ici on a:

A	5	E	3

On vous donne une règle. Il faut dire quelles cartes il faut retourner pour savoir si la règle est vraie ou non. Ici la règle est : “s'il y a un A d'un côté, il y a un 3 de l'autre”.

b) Cette fois-ci, chaque carte représente une personne. D'un côté elle dit ce qu'elle boit, de l'autre elle dit son âge.

Whisky	16	Pepsi	22

Cette fois-ci, la règle est : “si quelqu'un boit de l'alcool, il a plus de 18 ans”.

CHAPITRE III

Matrices

MATRICES 1

Sommaire

I Notion de matrice

A Introduction

Dans de nombreuses situations, on représente des collections de nombres sous forme de tableau., en particulier lorsque l'on veut *croiser* deux critères.

Considérons l'exemple des tarifs postaux en 2001 :

Lettre : service rapide	
Poids jusqu'à	Tarif
20g	0,46€
50g	0,69€
100g	1,02€

Lettre recommandée			
Poids jusqu'à	Taux R1	Taux R2	Taux R3
20g	2,82€	3,35€	4,12€
50g	3,05€	3,58€	4,34€
100g	3,38€	3,92€	4,68€

Tous ces renseignements auraient pu être condensé dans l'unique tableau suivant :

Lettres : tarif des envois rapides				
Jusqu'à	Normal	R1	R2	R3
20g	0,46€	2,82€	3,35€	4,12€
50g	0,69€	3,05€	3,58€	4,34€
100g	1,02€	3,38€	3,92€	4,68€

Ce tableau est constitué d'un titre, d'une première ligne et d'une colonne de gauche qui précisent la nature des entrées : masse de la lettre, type de l'envoi, et enfin d'un tableau de nombres.

C'est cette partie du tableau qui va nous intéresser. Un tel tableau de $4 \times 3 = 12$ nombres est appelé une *matrice* à 4 *lignes* et 3 *colonnes*, nous le noterons sous la forme suivante :

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}46 & 2{,}82 & 3{,}35 & 4{,}12 \\ 0{,}69 & 3{,}05 & 3{,}58 & 4{,}34 \\ 1{,}02 & 3{,}38 & 3{,}92 & 4{,}68 \end{pmatrix}$$

Enlever les lignes indiquant la signification des nombres peut sembler étrange, mais c'est de cette façon que nous allons relier de nombreux problèmes de natures très différentes, en les mathématisant sous forme d'une ou plusieurs matrices sur lesquelles nous ferons des calculs.

B Définition générale

Une *matrice* à n lignes et p colonnes est un tableau de nombres de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

$a_{i,j}$ désigne l'élément à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne[1].

Lorsqu'on veut simplement donner un nom aux éléments de cette matrice, on la note en abrégé[2] : $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, et on dit que $a_{i,j}$ est le *terme général* de la matrice A.

Lorsque $n = p$, on dit plus simplement que la matrice A est une *matrice carrée d'ordre* n. Nous en rencontrerons beaucoup en particulier dans la résolution des systèmes linéaires.

Lorsque $n = 1$, on dit que A est une *matrice ligne*. Lorsque $p = 1$, on dit que A est une matrice *matrice colonne*, ou un *vecteur colonne* (ou plus simplement un *vecteur*).

[1] selon la convention LI-CO, indiquant que le premier indice est l'indice de ligne, le deuxième l'indice de colonne.

[2] et on notera à cette occasion que le convention consiste à numéroter les lignes et les colonnes à partir de 1, contrairement à de nombreux langages de programmation qui imposent une numérotation à partir de 0. On se demande à quoi pensent les informaticiens, de temps en temps !

C Égalité matricielle

Pour que deux matrices A et B soient égales, il faut :

- qu'elles soient de même taille, c'est-à-dire qu'elles aient le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes,
- et que leurs coefficients de mêmes indices soient égaux deux à deux.

Ainsi, les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas égales, bien qu'elles ne comportent toutes deux que des 0, parce qu'elles n'ont pas les mêmes dimensions.

II Calcul matriciel

A Addition matricielle

1 Exemple

Reprenons la matrice T donnant les tarifs postaux et supposons que ces tarifs subissent une augmentation[3]. Voici la matrice H donnant les augmentations pour chacun des tarifs envisagés :

$$H = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}25 & 0{,}35 & 0{,}12 \\ 0{,}06 & 0{,}28 & 0{,}32 & 0{,}41 \\ 0{,}09 & 0{,}31 & 0{,}37 & 0{,}44 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la matrice T' des nouveaux tarifs, on constate qu'il suffit d'additionner terme à terme les matrices T et H :

$$T' = T + H = \begin{pmatrix} 0{,}46 & 2{,}82 & 3{,}35 & 4{,}12 \\ 0{,}69 & 3{,}05 & 3{,}58 & 4{,}34 \\ 1{,}02 & 3{,}38 & 3{,}92 & 4{,}68 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}25 & 0{,}35 & 0{,}12 \\ 0{,}06 & 0{,}28 & 0{,}32 & 0{,}41 \\ 0{,}09 & 0{,}31 & 0{,}37 & 0{,}44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}50 & 3{,}07 & 3{,}70 & 4{,}24 \\ 0{,}75 & 3{,}33 & 3{,}90 & 4{,}75 \\ 1{,}11 & 3{,}69 & 4{,}29 & 5{,}12 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le tarif pour une lettre de masse comprise entre 20g et 50g envoyée au tarif recommandé R1 passe de 3,05€ à 3,33€.

2 Définition

Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont deux matrices à n lignes et p colonnes, la matrice *somme de A et B* est la matrice $A + B$ à n lignes et p colonnes dont le terme général $c_{i,j}$ vérifie, pour tout couple d'indices (i, j) tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$:

$$\boxed{c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}}$$

3 Propriétés

Nous admettrons les propriétés suivantes, qui simplifieront un certain nombre de calculs : pour toutes matrices A, B et C à n lignes et p colonnes,

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + 0_{n,p} = A$

où l'on a noté $0_{n,p}$ la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls.

On reconnaît des propriétés familières, mais il faut faire attention au fait que les matrices ne se comportent pas comme de simples nombres. Ce sera particulièrement clair lorsqu'on abordera la multiplication.

[3] ce qui n'a rien d'étonnant, quand on connaît les pratiques commerciales de la Poste !

B Produit d'une matrice par un réel

1 Exemple

Supposons maintenant que, pour ne pas faire de jaloux, tous les tarifs postaux soient augmentés de façon uniforme de 10%. Chaque coefficient de la matrice T est alors multiplié par 1,1.

Si T'' est la nouvelle matrice des tarifs, on convient de noter $T'' = 1{,}1T$. Ainsi :

$$T'' = 1{,}1T = 1{,}1 \begin{pmatrix} 0{,}46 & 2{,}82 & 3{,}35 & 4{,}12 \\ 0{,}69 & 3{,}05 & 3{,}58 & 4{,}34 \\ 1{,}02 & 3{,}38 & 3{,}92 & 4{,}68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}506 & 3{,}102 & 3{,}685 & 4{,}532 \\ 0{,}759 & 3{,}355 & 3{,}938 & 4{,}774 \\ 1{,}122 & 3{,}718 & 4{,}312 & 5{,}148 \end{pmatrix}$$

2 Définition

Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice à n lignes et p colonnes, et si λ est un nombre réel, la matrice *produit de la matrice A par le réel λ* est la matrice λA à n lignes et p colonnes dont le terme général $d_{i,j}$ vérifie, pour tout couple d'indices (i, j) tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$:

$$\boxed{d_{i,j} = \lambda a_{i,j}}$$

Notons trois cas particuliers importants :

- si $\lambda = 0$, alors[4] $0.A = 0_{n,p}$;
- si $\lambda = 1$, alors $1.A = A$;
- si $\lambda = -1$, alors la matrice $(-1).A$ est plus simplement notée $-A$; on l'appelle la matrice *opposée* de la matrice A, en raison du fait que $A + (-A) = 0_{n,p}$.

Cette matrice $-A$ nous permet de définir la *soustraction des matrices* : on convient que si A et B sont deux matrices à n lignes et p colonnes, alors la différence de A et B est la matrice

$$\boxed{A - B = A + (-B)}$$

3 Propriétés

Nous admettrons les propriétés suivantes : pour toutes matrices A et B à n lignes et p colonnes, et tous réels λ et μ :

- $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda (\mu A) = (\lambda\mu) A$.

C Produit de deux matrices

1 Exemple

Dans une entreprise, deux services s'occupent du courrier : le service « traitement des commandes », noté S_1, et le service « service après-vente », noté S_2. Voici un tableau résumant les volume de courrier traité par chaque service :

Service \ Masse	20g	50g	100g
S_1	50	35	15
S_2	7	3	4

[4]Notons qu'il est important de distinguer dans les notations le *réel* 0 et la *matrice* dont tous les termes sont nuls.

Si l'on demande de calculer le coût global des affranchissements pour chaque service et chaque tarif, on doit effectuer des opérations entre les deux tableaux de nombres T et

$$Q = \begin{pmatrix} 50 & 35 & 15 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Par exemple, pour savoir le coût des envois en recommandé au tarif R_2 pour le service S_2, on fait :

$$7 \times 3{,}35 + 3 \times 3{,}58 + 4 \times 3{,}92 = 49{,}87$$

On peut disposer les calculs de la manière suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0{,}46 & 2{,}82 & 3{,}35 & 4{,}12 \\ 0{,}69 & 3{,}05 & 3{,}58 & 4{,}34 \\ 1{,}02 & 3{,}38 & 3{,}92 & 4{,}68 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 50 & 35 & 15 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 62{,}45 & 298{,}45 & 351{,}60 & 428{,}10 \\ 9{,}37 & 42{,}41 & 49{,}87 & 60{,}58 \end{pmatrix} \end{array}$$

On appelle la matrice résultat de ce calcul le *produit* des matrices T et Q.

Remarquons que pour qu'une telle disposition des calculs soit possible, il est nécessaire que les tailles des matrices soient compatibles. Plus précisément, il est nécessaire que le nombre de colonnes de la première matrice soit identique au nombre de lignes de la deuxième (ce qui, quand on donne un sens à ces lignes et colonnes, et tout à fait évident !).

2 Définition

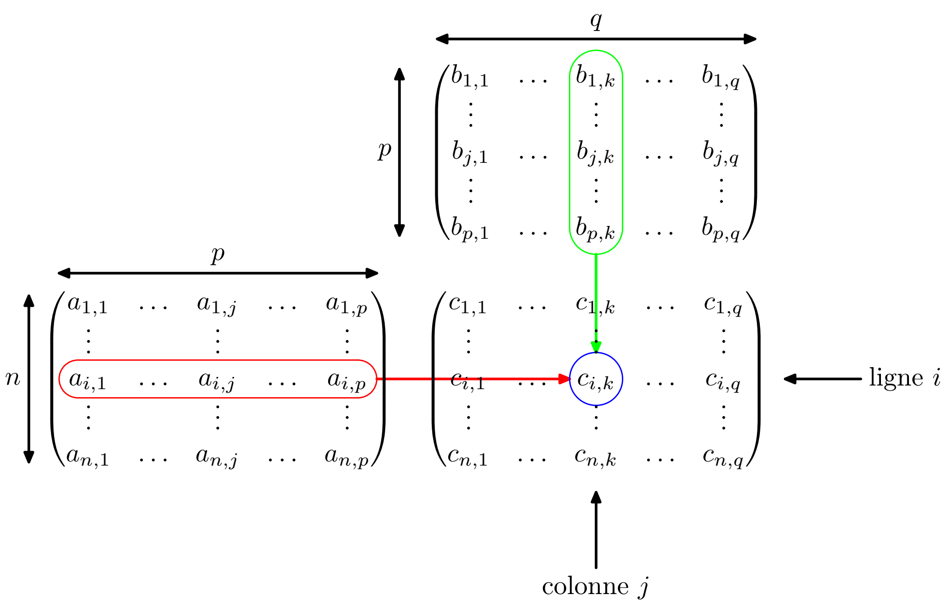
Soit A une matrice à n lignes et p colonnes, et B une matrice à p lignes et q colonnes.

Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice $AB = (c_{i,k})$ à n lignes et q colonnes définie par :

$$c_{i,k} = a_{i,1}b_{1,k} + \cdots + a_{i,j}b_{j,k} + \cdots + a_{i,p}b_{p,k}$$

pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant q$.

Ainsi, comme le montre la figure ci-dessous, le coefficient d'indice (i, k) de la matrice produit se calcule en suivant la i-ème ligne de A et la k-ème colonne de B.



Il est fortement conseillé, après s'être un peu entraîné à la main, de faire ces calculs à la calculette ! Car s'ils ne sont pas difficiles, ils sont longs et répétitifs !

Exercice : Tiens, au fait, combien faut-il faire d'additions et de multiplications pour calculer le produit d'une matrice (n, p) par une matrice (p, q) ?

Et si vous deviez programmer la fonction de multiplication de deux matrices, vous vous y prendriez comment ?

3 Propriétés

Nous admettrons les propriétés suivantes : pour toutes matrices A, B et C, de tailles compatibles avec les produits exprimés ci-dessous, et tout réel λ :

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$
- $A \times (\lambda B) = (\lambda A) \times B = \lambda . (A \times B)$.

Attention !!!

La multiplication des matrices n'a pas les mêmes propriétés que la multiplication des réels :

- le produit de deux réels n'est nul que si l'un (au moins) des deux est nul ; ceci n'est pas le cas pour les matrices ! vous pourrez vérifier que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  alors qu'aucun des deux matrices n'est la matrice nulle !

- il se peut que le produit $A \times B$ ait un sens, alors que $B \times A$ n'en ait pas (pour des raisons de dimensions) !

- quand bien même les dimensions des matrices seraient compatibles avec les deux produits, ils sont en général différents. Par exemple, si A a n lignes et p colonnes, et B a p lignes et n colonnes, alors AB est carrée d'ordre n, alors que BA est carrée d'ordre p. Et même si les tailles des matrices résultats sont identiques, elles sont en général différentes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Feuille d'exercices n°3 – Calcul matriciel

1) **Se repérer dans une matrice**

a) On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

On note $a_{i,j}$ (resp. $b_{i,j}$, $c_{i,j}$) le terme général de la matrice A (resp. B, C).

i. Quelles sont les tailles des trois matrices ?

ii. Donner les valeurs de $a_{1.2}$, $a_{2,1}$, $b_{3,1}$, $b_{1,3}$, $c_{2,1}$, et $c_{1,2}$.

iii. Remplacer les points des relations ci-dessous par les indices convenables (trouver toutes les bonnes réponses) :

$$b_{.,.} = 1, \qquad a_{1,.} = 1, \qquad c_{1,.} + c_{.,1} = 4$$

b) Écrire la matrice à 2 lignes et 3 colonnes définie par la formule : $a_{i,j} = i^2 + j^2$.

2) **Somme, produit par un réel**

a) Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

i. Calculer : $A + B$, $2A - 3B$, $3A - 2B$, et enfin $xA + yB$, où x et y sont deux réels quelconques.

ii. Déterminer x et y pour que les deux termes de la première ligne de $xA + yB$ valent respectivement 5 et 7.

b) Soit les matrices $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$.

Calculer la matrice $M = 2U - 3V + W$.

3) **Produit de matrices**

a) Soit les matrices $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer MB, BM, Mu, uM et uv.

b) Calculer les produits matriciels suivants :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ne pas oublier de vérifier les calculs avec une calculatrice.

4) **Puissances de matrices**

a) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

i. Calculer A^2, et montrer qu'il existe un réel α tel que $A^2 = \alpha A$.

ii. En déduire la valeur de A^3, A^4, et plus généralement A^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Soit B la matrice égale à $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

i. Calculer A^2 et A^3.

ii. En déduire la valeur de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

i. Calculer C^2, C^3 et C^4.

ii. On admet l'existence, pour tout entier naturel non nul n, d'un réel a_n tel que $C^n = a_n C$.
Trouver une expression de a_{n+1} en fonction de a_n, et en déduire la valeur de C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) On considère les matrices

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i. Montrer que $PP' = P'P = I$, et que $D = P\Delta P'$.
ii. Calculer Δ^2, Δ^3, et vérifier que $D^2 = P\Delta^2 P'$ et $D^3 = P\Delta^3 P'$.
iii. On admet que Δ^n s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$. Trouver une relation entre a_n et a_{n+1}, et en déduire la valeur de Δ^n pour tout entier n non nul.
iv. Montrer que $D^n = P\Delta^n P'$ (en développant $(P\Delta P')(P\Delta P')\dots(P\Delta P')$, et en déduire la valeur de D^n en fonction de n.

5) **Calcul matriciel en vrac**

51) On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

i. Calculer A^2, et trouver deux réels x et y tels que $A^2 = xA + yI$.
ii. En déduire l'existence d'une matrice B telle que $AB = I$, et vérifier que $BA = I$.

52) Soit les matrices $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

i. Calculer UV, VU, U^2, V^2 et enfin $U^2 + 2UV + V^2$.
ii. Calculer $W = U + V$, puis W^2.
iii. Pourquoi selon vous ces deux résultats sont-ils différents ?

6) **Existe-t-il des matrices égales à leur carré ?**

a) Que peut-on dire des dimensions d'une matrice A égale à son carré $A \times A$?

b) Savez-vous répondre à la question posée pour des matrices carrées d'ordre 1 ?

c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Calculer M^2. Y a-t-il des valeurs de a et b pour lesquelles $M^2 = M$?

d) Un brillant élève propose le raisonnement suivant à son professeur (où I est la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et où O est la matrice nulle) :

$$M^2 = M \iff M^2 - M = O \iff M(M - I) = O \iff M = O \text{ ou } M = I$$

Le professeur lui fait remarquer qu'on a trouvé d'autres solutions que les deux solutions "évidentes" O et I ! Où l'élève s'est-il trompé ?

7) **Application à l'économie**

Une entreprise de confection de vêtements fabrique des jupes, des robes et des pantalons.

- Pour fabriquer une jupe, il faut 0,75m de tissu, 4 boutons et une fermeture Éclair.
- Pour fabriquer une robe, il faut 1,5m de tissu, 6 boutons et une fermeture Éclair.
- Pour fabriquer un pantalon, il faut 1,25m de tissu, 2 boutons et une fermeture Éclair.

On appelle x, y et z les quantités respectives de jupes, de robes et de pantalons confectionnés, et a, b et c les quantités de tissu (en mètres), de boutons et de fermeture Éclair utilisées pour la fabrication.

Enfin on considère les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 1{,}5 & 1{,}25 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

a) i. Vérifier que $B = MA$.
ii. Déterminer a, b et c pour la fabrication de 200 jupes, 120 robes et 320 pantalons.

b) On considère la matrice $M' = \begin{pmatrix} -1{,}6 & 0{,}1 & 1{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & -1{,}4 \\ 0{,}8 & -0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

i. Calculer $M'M$.

ii. Écrire la matrice A en fonction de B et de M'.

iii. En déduire x, y et z quand on utilise 735m de tissu, 2 400 boutons et 620 fermetures Éclair.

c) L'entreprise a deux fournisseurs dont les prix de vente des différents produits sont donnés dans le tableau suivant :

	Prix du tissu (par m)	Prix d'un bouton	Prix d'une fermeture
Fournisseur 1	45	5	6
Fournisseur 2	48	4,5	5,5

On note C la matrice $\begin{pmatrix} 45 & 5 & 6 \\ 48 & 4{,}5 & 5{,}5 \end{pmatrix}$.

Calculer le produit CA. Que représente cette matrice ?

CHAPITRE IV

Rappels et compléments sur les suites

SUITES NUMÉRIQUES 1

Sommaire

I Notion de suite

A Exemples

Complétez les débuts de séquences suivants :

- 1, 1, 1, 1, 1, ...
- 1, 3, 5, 7, 9, ...
- 1, 2, 4, 8, 16, ...
- $\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \dots$
- 100, 50, 25, 12,5, 6,25, ...
- 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...
- $\ln(1), \ln(2), \ln(3), \ln(4), \ln(5), \dots$
- 1, 11, 21, 1211, 111221, ...

B Définition

Une suite est un procédé associant à chaque entier naturel n un réel u_n. Ainsi, une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On notera $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou plus simplement $(u_n)_n$, ou (u_n)) la suite (i.e. la *fonction*), et u_n le terme de la suite associé à l'indice n (i.e. la *valeur* de la fonction en n).

On rencontre souvent les suites dans la description des algorithmes : on peut considérer la suite des états de la mémoire lors de l'exécution d'un programme, la suite des temps de calcul associée à la taille de l'entrée, qui nous permet de mesurer la complexité d'un algorithme, etc.

C Deux modes de définition de suites

- On peut définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *explicitement*, en se donnant une fonction associant à chaque entier n le réel u_n.

  Par exemple, on peut définir les suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ par :

$$u_n = n^2 + 3n + 5, \quad v_n = \frac{2n+1}{n+3}, \quad w_n = \begin{cases} n^2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -2n-3 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

  Alors, on peut calculer directement :

$$u_7 = 7^2 + 3 \times 7 + 5 = 75, \quad v_5 = \frac{2 \times 5 + 1}{5+3} = \frac{11}{8}, \quad w_{13} = -2 \times 13 - 3 = -29$$

- On peut définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par récurrence*, en se donnant une fonction permettant de passer d'un terme au suivant. Il faut alors se donner un terme initial u_0.

  Par exemple, on peut définir les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_0 = 0,\ v_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \end{array} \right.$$

  Alors, pour calculer u_4 et v_5, il faut calculer les termes intermédiaires :

$$u_1 = 2 \times u_0 + 3 = 3,\ u_2 = 2 \times u_1 + 3 = 9\, u_3 = 2 \times u_2 + 3 = 21,\ u_4 = 2 \times u_3 + 3 = 45$$

  et

$$v_2 = v_1 + v_0 = 1,\ v_3 = v_2 + v_1 = 2,\ v_4 = v_3 + v_2 = 3,\ v_5 = v_4 + v_3 = 5$$

Remarquons que cette deuxième méthode, si elle est plus naturelle, demande plus de calcul. Imaginez le nombre de calculs nécessaires pour obtenir la valeur de v_{1000} !

D Comportement global

Une propriété est particulièrement recherchée lors de l'étude d'une suite : son *sens de variation*.

Définition 1 : *On dit que la suite $(u_n)_n$ est* croissante *si, pour tout entier n, $u_{n+1} \geqslant u_n$. Elle est dite* strictement croissante *si l'inégalité est toujours stricte.*

Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$ (qui énumère les nombres impairs) est strictement croissante, puisque pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = 2 > 0$, d'où $u_{n+1} > u_n$.

On définit de la même façon la notion de suite *décroissante*. Bien faire attention au fait que "décroissant" n'est pas le contraire de "croissant" : la plupart des suites ne sont **ni** croissantes, **ni** décroissantes, et certaines suites sont **à la fois** croissantes et décroissantes.

Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et $+1$, elle n'est ni croissante, ni décroissante.

Pouvez-vous trouver les suites qui sont à la fois croissantes et décroissantes ?

II Suites classiques

A Suites arithmétiques

Définition 2 : *La suite (u_n) est dite* arithmétique *s'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est alors appelé* raison *de la suite (u_n).*

Par exemple, si vous déposez tous les mois 100€ sur votre compte bancaire, la suite des sommes sur votre compte est une suite géométrique de raison 100.

Une suite arithmétique est ainsi définie par une relation de récurrence. On peut obtenir une relation explicite, qui caractérise d'ailleurs les suites de ce type :

Théorème 1

- Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a + nr$.
- Réciproquement, une suite (u_n) définie par une relation de la forme $u_n = \alpha n + \beta$ est arithmétique, de raison α et de premier terme $u_0 = \beta$. ★

Exercice : La suite (u_n) est arithmétique, on sait que $u_3 = 5$, et $u_7 = 17$. Calculer son premier terme et sa raison.

Une autre formule nous intéresse parfois : la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Théorème 2

Si (u_n) est une suite arithmétique, et si p et q sont deux indices ($p < q$), alors

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{q-1} + u_q = \underbrace{q - p + 1}_{\text{nbre de termes}} \times \underbrace{\frac{u_p + u_q}{2}}_{\text{moyenne des termes extrêmes}}$$ ★

Par exemple, la somme des n premiers entiers est : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

B Suites géométriques

Définition 3 : *La suite (v_n) est dite* géométrique *s'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n \times r$. Le réel r est alors appelé* raison *de la suite (v_n).*

Par exemple, si votre banque rémunère votre compte à 2% d'intérêts composés, la suite des sommes sur votre compte (après placement initial) est une suite géométrique de raison 1,02.

Une suite géométrique est ainsi définie par une relation de récurrence. On peut obtenir une relation explicite, qui caractérise d'ailleurs les suites de ce type :

Théorème 3

- Si (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = a$ et de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a \times r^n$.
- Réciproquement, une suite (v_n) définie par une relation de la forme $v_n = \beta \times \alpha^n$ est géométrique, de raison α et de premier terme $u_0 = \beta$. ★

Exercice : La suite (v_n) est géométrique, de premier terme $v_0 = 100$, et de raison 1,05. Calculer v_{10}, ainsi que la première valeur de n telle que $v_n \geqslant 2v_0$.

Une autre formule nous intéresse parfois : la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

Théorème 4
Si (v_n) est une suite géométrique de raison $r \neq 1$, et si p et q sont deux indices ($p < q$), alors

$$v_p + v_{p+1} + \cdots + v_{q-1} + v_q = v_p \times \frac{1 - r^{q-p+1}}{1 - r}$$ ★

Par exemple, la somme des n premières puissances de 2 est : $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n = \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$.

III Notion de limite

A Limite finie

Quand les valeurs d'une suite (u_n) sont de plus en plus proches d'un réel ℓ donné, on dit que cette suite a pour limite ℓ. Plus précisément :

Définition 4 : *On dit que la suite $(u_n)_n$ a pour limite 0 si u_n peut être rendu arbitrairement petit, pourvu que n soit suffisamment grand.*

On dit que la suite (u_n) a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ si la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \ell$ a pour limite 0.

Voici quelques exemples de référence :

Propriété 1
Les suites suivantes ont pour limite 0 :

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}},\ \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}},\ \text{et plus généralement } \left(\frac{1}{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ pour } k \in \mathbb{N}^*,\ (a^n)_n \text{ pour } 0 < a < 1$$

Preuve *Démontrons-le pour la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$: si $\varepsilon > 0$ est un "petit" nombre réel, alors $\frac{1}{n} < \varepsilon$ équivaut à $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Donc dès que n est plus grand que N, premier entier plus grand que $\frac{1}{\varepsilon}$, $0 < u_n < \varepsilon$.*

Ces exemples de références permettent, à l'aide de raisonnement simple, d'obtenir d'autres limites.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n^2 + 1}{n^2 + 2n + 4}$. Une expérimentation à la calculatrice montre que pour de grande valeur de n, u_n est très proche de 3. Essayons de comprendre pourquoi :

$$u_n = \frac{n^2\left(3 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right)} = \frac{3 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}}$$

Le numérateur de cette fraction a pour limite 3, le dénominateur a pour limite 1, on comprend pourquoi le quotient u_n a pour limite 3.

Cet exemple illustre une méthode générale pour obtenir des limites : lorsqu'on pense qu'une quantité est déterminante dans le calcul d'une limite (par exemple la plus grande puissance de l'entier n), on la factorise, et regarde ce qui reste à coté.

B Limite infinie

Le plus souvent, le temps de calcul d'un algorithme manipulant des tableaux de taille n devient de plus en plus grand au fur et à mesure que n augmente. Par exemple, l'algorithme de "tri à bulles" trie un tableau de taille n en faisant de l'ordre de $\frac{n^2}{2}$ comparaisons entre éléments du tableau. Pour $n = 1000$, on fait 5.10^5 comparaisons, pour un tableau de taille 10 000, on fera 5.10^7 comparaisons, etc. On peut très facilement imaginer la taille nécessaire d'un tableau pour que le temps de tri dépasse, disons, l'âge de l'univers !

Quand une suite a un tel comportement, on dit qu'elle a pour limite $+\infty$. Plus précisément :

Définition 5 : *On dit que la suite $(u_n)_n$ a pour limite $+\infty$ si u_n peut être rendu arbitrairement grand, pourvu que n soit suffisamment grand.*

Voici quelques exemples à connaître :

Propriété 2
Les suites suivantes ont pour limite 0 :

$$\left(n^k\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ pour } k \in \mathbb{N}^*,\ (\log_a n)_n \text{ et } (a^n)_n \text{ pour } a > 1$$

Preuve *Démontrons-le pour la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = n^2$: si $A > 0$ est un "grand" nombre réel, alors $n^2 > A$ équivaut à $n > \sqrt{A}$. Donc dès que n est plus grand que N, premier entier plus grand que $\sqrt{A}$, $u_n > A$.*

C Comparaison de suites

Très souvent, c'est moins la limite d'une suite (u_n) qui nous intéresse (en algorithmique, malheureusement, l'immense majorité des complexités, spatiales ou temporelles, a pour limite $+\infty$) que la comparaison de (u_n) à d'autres suites.

Définition 6 : *On dit que deux suites (u_n) est (v_n) sont* équivalentes *si la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ a pour limite 1.*

On dit que (u_n) est prépondérante *devant (v_n) (ou que (v_n) est* négligeable *devant (u_n)) si la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ a pour limite $+\infty$.*

Ainsi, si deux suites (u_n) et (v_n) ont pour limite $+\infty$, dire que (u_n) est prépondérante devant (v_n) signifie que (u_n) tend beaucoup plus vite vers $+\infty$ que (v_n).

Propriété 3
Si p et q sont deux entiers, $p < q$, et si a et b sont deux réels tels que $1 < a < b$, alors :

$$(\log_a n) << (n^p) << (n^q) << (a^n) << (b^n)$$

$(u_n) << (v_n)$ signifiant que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n). ★

Ainsi, par exemple, l'algorithme de "tri à bulles", dont la complexité temporelle est de l'ordre de $n^2/2$, est *asymptotiquement* moins performant que l'algorithme de "tri fusion", dont la complexité temporelle est de l'ordre de $n \log_2 n$, car :

$$\frac{n^2/2}{n \log_2 n} = \frac{n}{2 \log_2 n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Feuille d'exercices n°4 – Rappels et compléments sur les suites

1) **Suites arithmétiques**

   a) (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 10.
   Calculer u_n pour $1 \leqslant n \leqslant 5$, puis u_n pour n quelconque, la première valeur de n telle que $u_n > 100u_0$, et enfin la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.

   b) (v_n) est une suite arithmétique, telle que $v_5 = 17$, et $v_{13} = 28$. Calculer sa raison, son premier terme, ainsi que v_{20}.

2) **Suites géométriques**

   a) (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1000$, et de raison 1,05.
   Calculer u_n pour $1 \leqslant n \leqslant 5$, puis pour n quelconque, déterminer la première valeur de n pour laquelle $u_n \geqslant 2u_0$, et enfin la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.

   b) (v_n) est une suite géométrique, telle que $v_5 = 12$, et $v_7 = 6$. Calculer sa raison et son premier terme. Y a-t-il un problème ?

3) **Suites arithmético-géométriques**

   a) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
      i. Montrer que (u_n) est croissante.
      ii. On pose $v_n = u_n + 3$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
      iii. Calculer v_n pour $n \in \mathbb{N}$.
      iv. En déduire la valeur de u_n en fonction de n.

   b) Soit (v_n) définie par $v_0 = 0{,}1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 11v_n - 1$.
      i. Vérifier que (v_n) est constante.
      ii. Programmer le calcul des premiers termes de cette suite sur un tableur. Que se passe-t-il ? Expliquer ce phénomène.

   c) On place, à partir de l'an 2000, chaque année 9000€ sur un compte rémunéré à un taux annuel de 6% à intérêts composés.
   On note u_n le capital disponible au premier janvier de l'année $2000 + n$. Ainsi, $u_0 = 9000$.
      i. Calculer u_1.
      ii. Montrer que pour tout entier n, $u_{n+1} = 1{,}06u_n + 9000$.
      iii. Considérons la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 150\ 000$.
      Calculer v_0, et montrer que $v_{n+1} = 1{,}06v_n$. En déduire la nature de la suite (v_n), et la valeur de v_n, puis celle de u_n en fonction de n.
      iv. À partir de quelle année le capital disponible dépasse-t-il 200 000€ ?

4) **Comparaison de suites**

   a) Un algorithme de recherche de plus court chemin explore un réseau de n ville en effectuant $n!$ calculs.
      i. Que pensez-vous de ses performances ? Faites un tableau.
      ii.

CHAPITRE V

Langage de la théorie des ensembles

THÉORIE DES ENSEMBLES 1

Sommaire

I Généralités

A Quantificateurs

Dans ce cours, nous allons utiliser des *quantificateurs*. Leur rôle en mathématiques est d'énoncer et de formaliser des propriétés.

- Le quantificateur *universel* $\forall$ permet d'énoncer une propriété commune à tous les objets, il se lit “pour tout”. Par exemple, pour exprimer le fait que le carré d'un nombre est toujours positif, on écrit :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geqslant 0$$

- Le quantificateur *existentiel* $\exists$ permet d'affirmer l'existence d'un objet, il se lit “il existe”. Ainsi, pour exprimer le fait qu'un nombre positif a est le carré d'un réel, on pourra écrire :

$$(\exists\, \alpha \in \mathbb{R})\ \alpha^2 = a$$

  Remarquer que la phrase énoncée ne dit pas comment trouver un tel α, elle ne dit pas non plus combien de tels α existent (il peut y en avoir un, plusieurs, une infinité, tous les réels peuvent convenir, ou bien cela peut-il dépendre de a...).

On prendra bien garde à ne pas utiliser ces quantificateurs dans des phrases en français : ce ne sont pas des abréviations[1].

La partie de la logique qui combine le calcul des propositions aux quantificateurs s'appelle la *logique du premier ordre*. Une proposition contenant un ou plusieurs paramètres s'appelle un *prédicat*. Nous aurons l'occasion d'en reparler, ces notions sont importantes en informatique lorsqu'on veut vérifier ou garantir le bon fonctionnement d'un programme.

B Notion d'ensemble

Un ensemble est une collection d'objets possédant des propriétés communes. On peut par exemple parler de l'ensemble de tous les nombres entiers naturels, ou bien de l'ensemble des participants à une compétition sportive.

Un ensemble peut être déterminé par la liste de ses éléments, écrits entre des accolades et séparés par des virgules (ou des points-virgules lorsqu'il peut y avoir ambiguïté) :

$$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Par exemple :

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ est l'ensemble des entiers compris entre 0 et 5, ensemble qui peut être considéré aussi comme l'ensemble des restes possibles lors d'une division euclidienne par 6 ;
- $\{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, clubsuit\}$ est l'ensemble des couleurs d'un jeu de cartes.

On peut aussi définir un ensemble par une propriété caractéristique de ses éléments, sous la forme :

$$E = \{x \ /\ p\,(x)\}$$

où p est un prédicat à une variable. Il faut alors bien comprendre qu'on définit cet ensemble comme un *sous-ensemble* d'un ensemble déjà défini (autrement dit, les x mentionnés dans la définition ne viennent pas de nulle part !). Par exemple :

- l'intervalle $]4; +\infty[$ est l'ensemble des réels x strictement plus grands que 4 ; on peut écrire cette définition sous la forme :

$$]4; +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R} \ /\ x > 4\}$$

  qui se lit : $]4; +\infty[$ est l'ensemble des x *réels* qui sont strictement plus grand que 4 ;

[1] Par contre, rien n'interdit de les utiliser dans la prise de note !

- l'ensemble des entiers pairs, qu'on peut noter $2\mathbb{Z}$, est défini par :

$$2\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ (\exists\, k \in \mathbb{Z})\ x = 2k\}$$

qui se lit : $2\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs x tels qu'il existe un entier relatif k tel que $x = 2k$; plus simplement : c'est l'ensemble des doubles des entiers relatifs.

II Sous-ensembles

A Parties d'un ensemble

On dit qu'un ensemble A est *une partie* (ou un *sous-ensemble*) d'un ensemble E si tous les éléments de A sont aussi des éléments de E. On note alors : $A \subset E$, ce qui se lit : "A est *inclus* dans E". Ainsi :

$$A \subset E \iff (\forall x)\ x \in A \Longrightarrow x \in E$$

En particulier, pour tout ensemble E :

- $E \subset E$, car $(\forall x)\ x \in E \Longrightarrow x \in E$
- $\varnothing \subset E$, car $(\forall x)\, x \in \varnothing \Longrightarrow x \in E$ (en effet, dans ce dernier cas, $x \in \varnothing$ est faux pour tout élément x, et on sait que $A \Longrightarrow B$ est vrai lorsque A est faux).

L'ensemble de toutes les parties d'un ensemble est noté $\mathscr{P}(E)$.
Par exemple, si $E = \{a, b, c\}$, alors

$$\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$$

Deux ensembles sont égaux si ils ont les mêmes éléments. Cela se traduit par la double inclusion :

$$(E = F) \iff ((E \subset F) \wedge (F \subset E))$$

Attention enfin à ne pas confondre :

- $\in$ et $\subset$,
- x et $\{x\}$,
- E et $\mathscr{P}(E)$.

B Opérations usuelles

1 Complémentaire

Si A est une partie de E, on appelle *complémentaire de A dans E* l'ensemble de tous les éléments de E qui ne sont pas dans A. On le note $\overline{A}$, ou $\complement_E A$. Ainsi :

$$\complement_E A = \{x \in E \ / \ x \notin A\}$$

Par exemple, $\complement_E \varnothing = E$, et $\complement_E E = \varnothing$.

2 Union, intersection

Étant données deux parties A et B d'un ensemble E, on définit deux nouveaux ensembles :

- la *réunion* (ou *l'union*) de A et B, noté $A \cup B$; c'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à *au moins l'une* des deux parties A ou B :

  $$A \cup B = \{x \in E \ / \ x \in A \vee x \in B\}$$

  (on se souviendra que ce "ou" $(\vee)$ n'est pas exclusif) ;

- l'*intersection* de A et B, noté $A \cap B$; c'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent *aux deux* parties A et B :
$$A \cap B = \{x \in E \ / \ x \in A \wedge x \in B\}$$

On dit que deux parties A et B sont *disjointes* si leur intersection est vide ($A \cap B = \varnothing$), autrement dit si A et B n'ont aucun élément commun.

Voici quelques propriétés de ces constructions. Pour toutes parties A, B et C d'un ensemble E :

- Commutativité :
$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad A \cup B = B \cup A$$

- Double distributivité :
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Éléments neutres :
$$A \cup \varnothing = A \quad \text{et} \quad A \cap E = A$$

- Complément :
$$A \cup \complement_E A = E \quad \text{et} \quad A \cap \complement_E A = \varnothing$$

C Lien avec la logique

On peut constater l'existence de liens étroits entre le langage de la logique et le langage de la théorie des ensembles. On pourra souvent, pour simplifier un raisonnement, transposer dans l'un ou l'autre monde à l'aide du dictionnaire suivant :

$\Longleftrightarrow$	$\Longrightarrow$	$/$	$\vee$	$\wedge$	$\mathscr{V}$	$\mathscr{F}$
$=$	$\subset$	$\complement_E$	$\cup$	$\cap$	E	$\varnothing$

Ces liens permettent de démontrer très simplement les propriétés énoncées précédemment.

III Cardinal d'un ensemble fini

Si E est un ensemble *fini*, on appelle **cardinal** de E, et on note $\text{card}\,(E)$, le nombre d'éléments de E.

Par exemple, le cardinal de l'ensemble $\{a, b, c, d, e, f\}$ est 6, le cardinal de l'ensemble vide est 0.

Il existe des ensembles qui n'ont pas de cardinal : ce sont les ensembles qui ne sont pas *finis* (au sens où ils n'ont pas un nombre fini d'éléments). Par exemple, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas des ensembles finis.

Remarquons au passage que si un ensemble est fini, tous ses sous-ensembles ont finis, de cardinal inférieur au cardinal de l'ensemble.

Une relation permet de calculer le cardinal d'une réunion de parties d'un ensemble : le *principe d'inclusion-exclusion.* Sa version à deux parties s'écrit et se démontre simplement :

$$\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\,(A) + \text{card}\,(B) - \text{card}\,(A \cap B)$$

En effet, si l'on compte les éléments de A puis les éléments de B, on compte deux fois les éléments de leur intersection.

Dans le cas particulier où A et B sont *disjoints* ($A \cap B = \varnothing$), on a plus simplement $\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\,(A) + \text{card}\,(B)$.

IV Produit cartésien

À partir de deux ensembles E_1 et E_2, on peut en construire un troisième dont les éléments sont les *couples* (x_1, x_2), avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. On nomme ce nouvel ensemble **produit cartésien** de E_1 et E_2, et on le note $E_1 \times E_2$. Ainsi :

$$E_1 \times E_2 = \{(x_1, x_2) \ / \ x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\}$$

Si E_1 et E_2 sont des ensembles finis, alors $E_1 \times E_2$ l'est aussi, et

$$\operatorname{card}(E_1 \times E_2) = \operatorname{card}(E_1) \times \operatorname{card}(E_2)$$

Par exemple, si l'on lance une pièce de monnaie, puis un dé, les issues possibles de cette expérience peuvent être notées sous forme de couples (x, y), avec $x \in \{P, F\}$ et $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Le couple $(P, 3)$ représentent l'issue “obtenir pile avec la pièce, et 3 avec le dé”.

Comme il y a deux issues possibles pour le lancer de la pièce, et six pour le lancer du dé, le nombre d'issues possibles pour cette expérience est $2 \times 6 = 12$.

Si les ensembles E_1 et E_2 sont égaux à un même ensemble E, on notera E^2 plutôt que $E \times E$.

Enfin, si l'on dispose de plus de deux ensembles $E_1, \ldots, E_n$, on peut considérer leur produit cartésien : c'est l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$, avec $x_i \in E_i$ pour tout i. Si les n ensembles sont tous égaux à E, on notera ce produit cartésien E^n.

Cette construction est intensivement utilisée pour comprendre le mode de fonctionnement des bases de données.

Feuille d'exercices n°5 – Ensembles

1) **Prédicats, quantificateurs**

   a) *Prédicats*
   Traduire en écriture symbolique les propositions suivantes, et déterminer leurs valeurs de vérité :
   - tout nombre réel a un carré positif
   - il existe un nombre réel dont le carré est positif
   - toute somme de deux nombres réels a pour carré la somme des carrés de ces deux nombres
   - il existe deux nombres réels dont la somme a pour carré la somme des carrés de ces nombres.

   Écrire aussi la négation de chacune de ces propositions, et en déterminer la valeur de vérité.

   b) *Caractérisation de E et $\varnothing$*
   Démontrer les implications suivantes :
$$\{(\forall A \subset E)\ A \cup B = E\} \Longrightarrow (B = E)$$
$$\{(\forall A \subset E)\ A \cap B = \varnothing\} \Longrightarrow (B = \varnothing)$$

   c) *Ordre des quantificateurs*
   Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
   i. Quelle propriété de A la proposition suivante exprime-t-elle ?
$$(\exists\, M \in \mathbb{R})\,(\forall x \in A)\ x \leqslant M$$
   ii. Donner un exemple d'une partie A possédant cette propriété.
   iii. Écrire la négation de cette propriété, et donner un exemple de partie de $\mathbb{R}$ pour laquelle cette négation est vraie.
   iv. Pouvez-vous expliquer pourquoi la proposition suivante n'a absolument aucun intérêt ?
$$(\forall x \in A)\,(\exists\, M \in \mathbb{R})\ x \leqslant M$$

2) **Simplification d'égalités ensemblistes**

   a) Donner un exemple de trois ensembles A, B et C tels que $A \cap B = A \cap C$, mais $A \neq B$.
   b) Mêmes questions en remplaçant $\cap$ par $\cup$.
   c) À l'aide de diagrammes, montrer les identités suivantes :
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
   d) Soient A et B deux parties d'un même ensemble E. À l'aide de diagrammes, simplifier : $(A \cap (A \cup B)) \cap (A \cup E)$.

3) **Égalité d'ensembles**
   Soit A, B et C trois ensembles, on suppose que $A \subset B$, $B \subset C$ et $C \subset A$. Que peut-on en déduire ?

4) **Partitions**
   Dire que n sous-ensembles *non vides* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'un ensemble E forment une **partition** de E revient à dire que chaque élément de E appartient à *exactement* un A_i. Ceci est équivalent à :
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E \quad \text{et} \quad A_i \cap A_j = \varnothing \text{ pour tout } i \neq j$$

   a) Soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, et
$$A = \{a, c, f\}\,,\ B = \{b, g\}\,,\ C = \{d, h\}$$
   Représenter ces ensembles à l'aide d'un diagramme.

b) Même question avec A, B et C', où $C' = \{d, e, f, h\}$.

c) Même question avec A, B' et C, où $B' = \{b, e, g\}$.

d) Trouver toutes les partitions de $F = \{1, 2, 3\}$, puis de $G = \{1, 2, 3, 4\}$.

5) **Produit cartésien**

Soit $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$.

a) Montrer que $E \times F$ et $F \times E$ ont même cardinal, mais que ce sont deux ensembles différents.

b) Que vaut le cardinal de E^3 ? En donner les éléments.

6) **Différence symétrique**

A et B étant deux sous-ensembles d'un ensemble E, on définit leur *différence symétrique* $A\Delta B$ par

$$A\Delta B = \{x \in E \;/\; x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$$

a) Représenter $A\Delta B$ à l'aide d'un diagramme.

b) Montrer que $A\Delta B = \big(A \cap \complement_E B\big) \cup \big(B \cap \complement_E A\big)$, et que les deux parties de cette réunion sont disjointes.

c) Déterminer $A\Delta A$, $A\Delta E$, $A\Delta\varnothing$.

d) Démontrer que pour tous sous-ensembles A et B de E, $A\Delta B = B\Delta A$.

e) On se place dans le cas particulier où

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}\,,\ A = \{a, b, c, d, e, f\}\,,\ B = \{b, c, e, g, i\}\ \text{ et } C = \{c, d, e, h\}$$

Comparer $(A\Delta B)\,\Delta C$ et $A\Delta\,(B\Delta C)$.

CHAPITRE VI

Notions de base sur les graphes

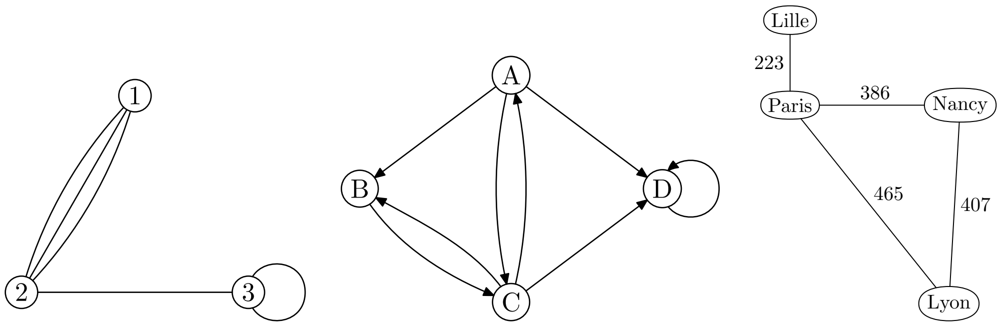
GRAPHES 1

Sommaire

I Notion de graphe simple orienté

- Un *graphe* est un ensemble de points, appelés *sommets* ou *nœuds*, dont certaines paires sont directement reliées par un ou plusieurs liens.
- Ces liens peuvent être *orientés* (on distingue le lien allant de u à v du lien allant de v à u), auquel cas ils sont appelés des *arcs*, ou pas, auquel cas on les appelle des *arêtes*.
- Ces liens peuvent aussi être associés à des nombres réels, auquel cas on parle de *graphe valué*.
- Enfin, le graphe est dit *simple* si il existe au plus un arc ou une arête entre deux sommets.

Voici quelques exemples de graphes :



graphe non orienté — graphe simple orienté — graphe valué

II Modes de représentation

III Vocabulaire

Feuille d'exercices n°6 – Graphes

1)

a)

2)

a)