

# Test n°2 : calcul des propositions

## Cours

Donner les tables de vérité de l'équivalence, de la négation, de la conjonction, de la disjonction et de l'implication.

## Exercices

### EXERCICE 1 : VRAI ET FAUX

On note respectivement  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{F}$  les propositions "vrai" et "faux". Soit  $P$  une proposition quelconque.

1) Compléter la table de vérité suivante :

$P$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$P \wedge \mathcal{V}$	$P \vee \mathcal{V}$	$P \wedge \mathcal{F}$	$\overline{P} \wedge \overline{\mathcal{F}}$	$\overline{P} \vee \overline{\mathcal{F}}$
0	1	0					
1	1	0					

2) Pouvez-vous en déduire des façons plus simples d'étiqueter les colonnes de ce tableau ?

### EXERCICE 2 : TAUTOLOGIES

Prouver que les propositions suivantes sont des tautologies :

- 1)  $[(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)] \iff [P \iff Q]$
- 2)  $[P \implies Q] \iff [\overline{P} \vee Q]$
- 3)  $[P \wedge (P \implies Q)] \implies Q$
- 4)  $[(A \implies B) \wedge (B \implies C)] \implies (A \implies C)$ .

### EXERCICE 3 : SIMPLIFICATION

- 1) Montrer, *uniquement à l'aide des propriétés des connecteurs logiques*, que la proposition  $(P \implies Q) \implies Q$  est équivalente à la proposition  $P \vee Q$ .
- 2) Simplifier la proposition  $P \implies (Q \implies Q)$ .
- 3) L'opérateur d'implication  $\implies$  est-il associatif ? Autrement dit, a-t-on toujours

$$[(P \implies Q) \implies R] \iff [P \implies (Q \implies R)] ?$$

## EXERCICE 4 : JEU DE CARTES

On dispose de cartes sur lesquelles sont inscrits une lettre d'un côté, et un chiffre de l'autre. Quatre cartes sont disposées devant vous, et on vous donne une règle. Indiquez dans chaque cas la ou les cartes que vous devez retourner pour vérifier la règle proposée, en précisant votre raisonnement.

- 1) La règle est : "s'il y a un A d'un côté, il y a un 3 de l'autre côté", et les cartes sont :

V	3	5	A
---	---	---	---

- 2) Les cartes sont les mêmes, mais cette fois-ci la règle est : "il y a un A d'un côté si et seulement si il y a un 3 de l'autre côté".
- 3) Les cartes sont toujours les mêmes, mais la règle est ici : "il y a un A d'un côté ou un 3 de l'autre côté".

## EXERCICE BONUS : L'ÉNIGME DES COFFRETS DE PORTIA

Dans le Marchand de Venise, de Shakespeare, Portia a trois coffrets, un d'or, un d'argent et un de plomb et, dans l'un d'eux, elle a caché son portrait. Quand un des soupirants se présente, elle lui fait choisir l'un des coffrets, et c'est celui qui aura la chance (ou l'astuce) de trouver le coffret contenant son portrait qui pourra l'épouser.

Mais le couvercle de chaque coffret porte deux inscriptions pour guider le choix du soupirant, car Portia ne veut pas choisir un époux pour sa vertu mais pour son intelligence.

Elle traça un jour les inscriptions suivantes :

Coffret en or	Coffret en argent	Coffret en plomb
<i>Le portrait n'est pas dans ce coffret</i>	<i>Le portrait n'est pas dans le coffret en or</i>	<i>Le portrait n'est pas dans ce coffret</i>
<i>Le portrait est dans le coffret en argent</i>	<i>Le portrait est dans le coffret en plomb</i>	<i>Le portrait est dans le coffret en or</i>

Elle expliqua à son soupirant que sur l'un des coffrets deux affirmations étaient vraies, sur un autre elles étaient fausses toutes les deux, et sur le troisième l'une était vraie et l'autre était fausse. Quel coffret le candidat au mariage devrait-il choisir pour épouser Portia ?

---

Rappel de la signification des symboles utilisés :

$$\begin{array}{lll} P \wedge Q : P \text{ et } Q & P \vee Q : P \text{ ou } Q & \bar{P} : \text{non } P \\ P \implies Q : P \text{ implique } Q & P \iff Q : P \text{ équivaut à } Q & \end{array}$$