Feuille d'exercices n°5 – Ensembles

1) **Prédicats, quantificateurs**

a) *Prédicats*

Traduire en écriture symbolique les propositions suivantes, et déterminer leurs valeurs de vérité :

- tout nombre réel a un carré positif
- il existe un nombre réel dont le carré est positif
- toute somme de deux nombres réels a pour carré la somme des carrés de ces deux nombres
- il existe deux nombres réels dont la somme a pour carré la somme des carrés de ces nombres.

Écrire aussi la négation de chacune de ces propositions, et en déterminer la valeur de vérité.

b) *Caractérisation de E et $\varnothing$*

Démontrer les implications suivantes :

$$\{(\forall A \subset E)\ A \cup B = E\} \Longrightarrow (B = E)$$
$$\{(\forall A \subset E)\ A \cap B = \varnothing\} \Longrightarrow (B = \varnothing)$$

c) *Ordre des quantificateurs*

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

i. Quelle propriété de A la proposition suivante exprime-t-elle ?

$$(\exists\, M \in \mathbb{R})\, (\forall x \in A)\ x \leqslant M$$

ii. Donner un exemple d'une partie A possédant cette propriété.

iii. Écrire la négation de cette propriété, et donner un exemple de partie de $\mathbb{R}$ pour laquelle cette négation est vraie.

iv. Pouvez-vous expliquer pourquoi la proposition suivante n'a absolument aucun intérêt ?

$$(\forall x \in A)\, (\exists\, M \in \mathbb{R})\ x \leqslant M$$

2) **Simplification d'égalités ensemblistes**

a) Donner un exemple de trois ensembles A, B et C tels que $A \cap B = A \cap C$, mais $A \neq B$.

b) Mêmes questions en remplaçant $\cap$ par $\cup$.

c) À l'aide de diagrammes, montrer les identités suivantes :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

d) Soient A et B deux parties d'un même ensemble E. À l'aide de diagrammes, simplifier : $(A \cap (A \cup B)) \cap (A \cup E)$.

3) **Égalité d'ensembles**

Soit A, B et C trois ensembles, on suppose que $A \subset B$, $B \subset C$ et $C \subset A$. Que peut-on en déduire ?

4) **Partitions**

Dire que n sous-ensembles *non vides* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'un ensemble E forment une **partition** de E revient à dire que chaque élément de E appartient à *exactement* un A_i. Ceci est équivalent à :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E \quad \text{et} \quad A_i \cap A_j = \varnothing \text{ pour tout } i \neq j$$

a) Soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, et

$$A = \{a, c, f\}\,,\ B = \{b, g\}\,,\ C = \{d, h\}$$

Représenter ces ensembles à l'aide d'un diagramme.

b) Même question avec A, B et C', où $C' = \{d, e, f, h\}$.

c) Même question avec A, B' et C, où $B' = \{b, e, g\}$.

d) Trouver toutes les partitions de $F = \{1, 2, 3\}$, puis de $G = \{1, 2, 3, 4\}$.

5) **Produit cartésien**

Soit $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$.

a) Montrer que $E \times F$ et $F \times E$ ont même cardinal, mais que ce sont deux ensembles différents.

b) Que vaut le cardinal de E^3 ? En donner les éléments.

6) **Différence symétrique**

A et B étant deux sous-ensembles d'un ensemble E, on définit leur *différence symétrique* $A\Delta B$ par

$$A\Delta B = \{x \in E \;/\; x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$$

a) Représenter $A\Delta B$ à l'aide d'un diagramme.

b) Montrer que $A\Delta B = \big(A \cap \complement_E B\big) \cup \big(B \cap \complement_E A\big)$, et que les deux parties de cette réunion sont disjointes.

c) Déterminer $A\Delta A$, $A\Delta E$, $A\Delta\varnothing$.

d) Démontrer que pour tous sous-ensembles A et B de E, $A\Delta B = B\Delta A$.

e) On se place dans le cas particulier où

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}\,,\;\; A = \{a, b, c, d, e, f\}\,,\;\; B = \{b, c, e, g, i\} \text{ et } C = \{c, d, e, h\}$$

Comparer $(A\Delta B)\,\Delta C$ et $A\Delta\,(B\Delta C)$.