CHAPITRE III

Matrices

MATRICES 1

Sommaire

I Notion de matrice

A Introduction

Dans de nombreuses situations, on représente des collections de nombres sous forme de tableau., en particulier lorsque l'on veut *croiser* deux critères.

Considérons l'exemple des tarifs postaux en 2001 :

Lettre : service rapide	
Poids jusqu'à	Tarif
20g	0,46€
50g	0,69€
100g	1,02€

Lettre recommandée			
Poids jusqu'à	Taux R1	Taux R2	Taux R3
20g	2,82€	3,35€	4,12€
50g	3,05€	3,58€	4,34€
100g	3,38€	3,92€	4,68€

Tous ces renseignements auraient pu être condensé dans l'unique tableau suivant :

Lettres : tarif des envois rapides				
Jusqu'à	Normal	R1	R2	R3
20g	0,46€	2,82€	3,35€	4,12€
50g	0,69€	3,05€	3,58€	4,34€
100g	1,02€	3,38€	3,92€	4,68€

Ce tableau est constitué d'un titre, d'une première ligne et d'une colonne de gauche qui précisent la nature des entrées : masse de la lettre, type de l'envoi, et enfin d'un tableau de nombres.

C'est cette partie du tableau qui va nous intéresser. Un tel tableau de $4 \times 3 = 12$ nombres est appelé une *matrice* à 4 *lignes* et 3 *colonnes*, nous le noterons sous la forme suivante :

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}46 & 2{,}82 & 3{,}35 & 4{,}12 \\ 0{,}69 & 3{,}05 & 3{,}58 & 4{,}34 \\ 1{,}02 & 3{,}38 & 3{,}92 & 4{,}68 \end{pmatrix}$$

Enlever les lignes indiquant la signification des nombres peut sembler étrange, mais c'est de cette façon que nous allons relier de nombreux problèmes de natures très différentes, en les mathématisant sous forme d'une ou plusieurs matrices sur lesquelles nous ferons des calculs.

B Définition générale

Une *matrice* à n lignes et p colonnes est un tableau de nombres de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

$a_{i,j}$ désigne l'élément à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne[1].

Lorsqu'on veut simplement donner un nom aux éléments de cette matrice, on la note en abrégé[2] : $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, et on dit que $a_{i,j}$ est le *terme général* de la matrice A.

Lorsque $n = p$, on dit plus simplement que la matrice A est une *matrice carrée d'ordre n*. Nous en rencontrerons beaucoup en particulier dans la résolution des systèmes linéaires.

Lorsque $n = 1$, on dit que A est une *matrice ligne*. Lorsque $p = 1$, on dit que A est une matrice *matrice colonne*, ou un *vecteur colonne* (ou plus simplement un *vecteur*).

[1] selon la convention LI-CO, indiquant que le premier indice est l'indice de ligne, le deuxième l'indice de colonne.

[2] et on notera à cette occasion que le convention consiste à numéroter les lignes et les colonnes à partir de 1, contrairement à de nombreux langages de programmation qui imposent une numérotation à partir de 0. On se demande à quoi pensent les informaticiens, de temps en temps !

C Égalité matricielle

Pour que deux matrices A et B soient égales, il faut :

- qu'elles soient de même taille, c'est-à-dire qu'elles aient le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes,
- et que leurs coefficients de mêmes indices soient égaux deux à deux.

Ainsi, les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas égales, bien qu'elles ne comportent toutes deux que des 0, parce qu'elles n'ont pas les mêmes dimensions.

II Calcul matriciel

A Addition matricielle

1 Exemple

Reprenons la matrice T donnant les tarifs postaux et supposons que ces tarifs subissent une augmentation[3]. Voici la matrice H donnant les augmentations pour chacun des tarifs envisagés :

$$H = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}25 & 0{,}35 & 0{,}12 \\ 0{,}06 & 0{,}28 & 0{,}32 & 0{,}41 \\ 0{,}09 & 0{,}31 & 0{,}37 & 0{,}44 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la matrice T' des nouveaux tarifs, on constate qu'il suffit d'additionner terme à terme les matrices T et H :

$$T' = T + H = \begin{pmatrix} 0{,}46 & 2{,}82 & 3{,}35 & 4{,}12 \\ 0{,}69 & 3{,}05 & 3{,}58 & 4{,}34 \\ 1{,}02 & 3{,}38 & 3{,}92 & 4{,}68 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}25 & 0{,}35 & 0{,}12 \\ 0{,}06 & 0{,}28 & 0{,}32 & 0{,}41 \\ 0{,}09 & 0{,}31 & 0{,}37 & 0{,}44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}50 & 3{,}07 & 3{,}70 & 4{,}24 \\ 0{,}75 & 3{,}33 & 3{,}90 & 4{,}75 \\ 1{,}11 & 3{,}69 & 4{,}29 & 5{,}12 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le tarif pour une lettre de masse comprise entre 20g et 50g envoyée au tarif recommandé R1 passe de 3,05€ à 3,33€.

2 Définition

Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont deux matrices à n lignes et p colonnes, la matrice *somme de A et B* est la matrice $A + B$ à n lignes et p colonnes dont le terme général $c_{i,j}$ vérifie, pour tout couple d'indices (i, j) tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$:

$$\boxed{c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}}$$

3 Propriétés

Nous admettrons les propriétés suivantes, qui simplifieront un certain nombre de calculs : pour toutes matrices A, B et C à n lignes et p colonnes,

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + 0_{n,p} = A$

où l'on a noté $0_{n,p}$ la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls.

On reconnaît des propriétés familières, mais il faut faire attention au fait que les matrices ne se comportent pas comme de simples nombres. Ce sera particulièrement clair lorsqu'on abordera la multiplication.

[3] ce qui n'a rien d'étonnant, quand on connaît les pratiques commerciales de la Poste !

B Produit d'une matrice par un réel

1 Exemple

Supposons maintenant que, pour ne pas faire de jaloux, tous les tarifs postaux soient augmentés de façon uniforme de 10%. Chaque coefficient de la matrice T est alors multiplié par 1,1.

Si T'' est la nouvelle matrice des tarifs, on convient de noter $T'' = 1{,}1T$. Ainsi :

$$T'' = 1{,}1T = 1{,}1 \begin{pmatrix} 0{,}46 & 2{,}82 & 3{,}35 & 4{,}12 \\ 0{,}69 & 3{,}05 & 3{,}58 & 4{,}34 \\ 1{,}02 & 3{,}38 & 3{,}92 & 4{,}68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}506 & 3{,}102 & 3{,}685 & 4{,}532 \\ 0{,}759 & 3{,}355 & 3{,}938 & 4{,}774 \\ 1{,}122 & 3{,}718 & 4{,}312 & 5{,}148 \end{pmatrix}$$

2 Définition

Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice à n lignes et p colonnes, et si λ est un nombre réel, la matrice *produit de la matrice A par le réel λ* est la matrice λA à n lignes et p colonnes dont le terme général $d_{i,j}$ vérifie, pour tout couple d'indices (i, j) tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$:

$$\boxed{d_{i,j} = \lambda a_{i,j}}$$

Notons trois cas particuliers importants :

- si $\lambda = 0$, alors[4] $0.A = 0_{n,p}$;
- si $\lambda = 1$, alors $1.A = A$;
- si $\lambda = -1$, alors la matrice $(-1).A$ est plus simplement notée $-A$; on l'appelle la matrice *opposée* de la matrice A, en raison du fait que $A + (-A) = 0_{n,p}$.

Cette matrice $-A$ nous permet de définir la *soustraction des matrices* : on convient que si A et B sont deux matrices à n lignes et p colonnes, alors la différence de A et B est la matrice

$$\boxed{A - B = A + (-B)}$$

3 Propriétés

Nous admettrons les propriétés suivantes : pour toutes matrices A et B à n lignes et p colonnes, et tous réels λ et μ :

- $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda (\mu A) = (\lambda\mu) A$.

C Produit de deux matrices

1 Exemple

Dans une entreprise, deux services s'occupent du courrier : le service « traitement des commandes », noté S_1, et le service « service après-vente », noté S_2. Voici un tableau résumant les volume de courrier traité par chaque service :

Service \ Masse	20g	50g	100g
S_1	50	35	15
S_2	7	3	4

[4]Notons qu'il est important de distinguer dans les notations le *réel* 0 et la *matrice* dont tous les termes sont nuls.

Si l'on demande de calculer le coût global des affranchissements pour chaque service et chaque tarif, on doit effectuer des opérations entre les deux tableaux de nombres T et

$$Q = \begin{pmatrix} 50 & 35 & 15 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Par exemple, pour savoir le coût des envois en recommandé au tarif R_2 pour le service S_2, on fait :

$$7 \times 3{,}35 + 3 \times 3{,}58 + 4 \times 3{,}92 = 49{,}87$$

On peut disposer les calculs de la manière suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0{,}46 & 2{,}82 & 3{,}35 & 4{,}12 \\ 0{,}69 & 3{,}05 & 3{,}58 & 4{,}34 \\ 1{,}02 & 3{,}38 & 3{,}92 & 4{,}68 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 50 & 35 & 15 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 62{,}45 & 298{,}45 & 351{,}60 & 428{,}10 \\ 9{,}37 & 42{,}41 & 49{,}87 & 60{,}58 \end{pmatrix} \end{array}$$

On appelle la matrice résultat de ce calcul le *produit* des matrices T et Q.

Remarquons que pour qu'une telle disposition des calculs soit possible, il est nécessaire que les tailles des matrices soient compatibles. Plus précisément, il est nécessaire que le nombre de colonnes de la première matrice soit identique au nombre de lignes de la deuxième (ce qui, quand on donne un sens à ces lignes et colonnes, et tout à fait évident !).

2 Définition

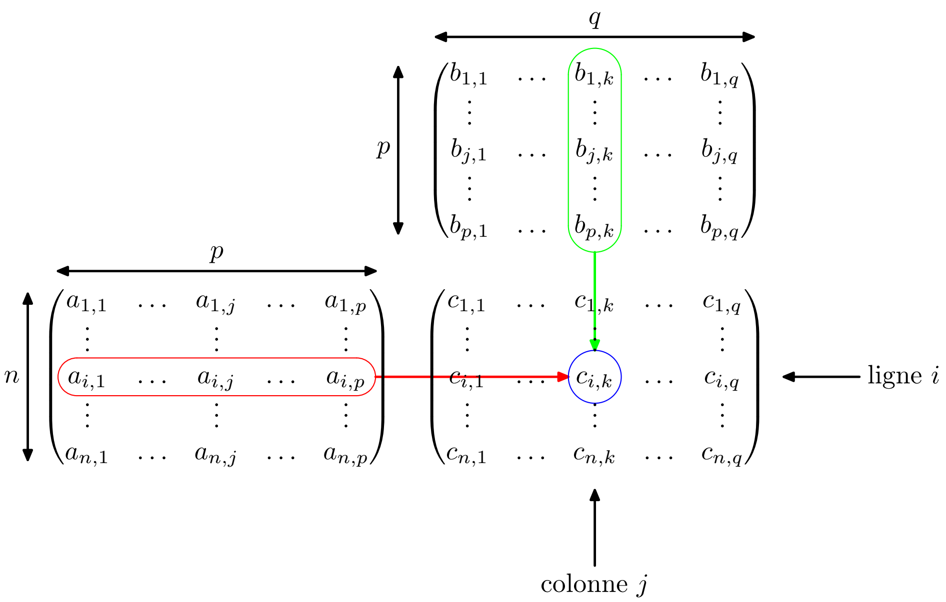
Soit A une matrice à n lignes et p colonnes, et B une matrice à p lignes et q colonnes.

Le **produit** de la matrice A par la matrice B est la matrice $AB = (c_{i,k})$ à n lignes et q colonnes définie par :

$$c_{i,k} = a_{i,1}b_{1,k} + \cdots + a_{i,j}b_{j,k} + \cdots + a_{i,p}b_{p,k}$$

pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant q$.

Ainsi, comme le montre la figure ci-dessous, le coefficient d'indice (i,k) de la matrice produit se calcule en suivant la i-ème ligne de A et la k-ème colonne de B.



Il est fortement conseillé, après s'être un peu entraîné à la main, de faire ces calculs à la calculette ! Car s'ils ne sont pas difficiles, ils sont longs et répétitifs !

Exercice : Tiens, au fait, combien faut-il faire d'additions et de multiplications pour calculer le produit d'une matrice (n,p) par une matrice (p,q) ?

Et si vous deviez programmer la fonction de multiplication de deux matrices, vous vous y prendriez comment ?

3 Propriétés

Nous admettrons les propriétés suivantes : pour toutes matrices A, B et C, de tailles compatibles avec les produits exprimés ci-dessous, et tout réel λ :

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$
- $A \times (\lambda B) = (\lambda A) \times B = \lambda.(A \times B)$.

Attention !!!

La multiplication des matrices n'a pas les mêmes propriétés que la multiplication des réels :

- le produit de deux réels n'est nul que si l'un (au moins) des deux est nul ; ceci n'est pas le cas pour les matrices ! vous pourrez vérifier que
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
alors qu'aucun des deux matrices n'est la matrice nulle !
- il se peut que le produit $A \times B$ ait un sens, alors que $B \times A$ n'en ait pas (pour des raisons de dimensions) !
- quand bien même les dimensions des matrices seraient compatibles avec les deux produits, ils sont en général différents. Par exemple, si A a n lignes et p colonnes, et B a p lignes et n colonnes, alors AB est carrée d'ordre n, alors que BA est carrée d'ordre p. Et même si les tailles des matrices résultats sont identiques, elles sont en général différentes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$