Feuille d'exercices n°3 – Calcul matriciel

1) **Se repérer dans une matrice**

a) On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

On note $a_{i,j}$ (resp. $b_{i,j}$, $c_{i,j}$) le terme général de la matrice A (resp. B, C).

i. Quelles sont les tailles des trois matrices ?

ii. Donner les valeurs de $a_{1.2}$, $a_{2,1}$, $b_{3,1}$, $b_{1,3}$, $c_{2,1}$, et $c_{1,2}$.

iii. Remplacer les points des relations ci-dessous par les indices convenables (trouver toutes les bonnes réponses) :

$$b_{.,.} = 1, \qquad a_{1,.} = 1, \qquad c_{1,.} + c_{.,1} = 4$$

b) Écrire la matrice à 2 lignes et 3 colonnes définie par la formule : $a_{i,j} = i^2 + j^2$.

2) **Somme, produit par un réel**

a) Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

i. Calculer : $A + B$, $2A - 3B$, $3A - 2B$, et enfin $xA + yB$, où x et y sont deux réels quelconques.

ii. Déterminer x et y pour que les deux termes de la première ligne de $xA + yB$ valent respectivement 5 et 7.

b) Soit les matrices $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$.

Calculer la matrice $M = 2U - 3V + W$.

3) **Produit de matrices**

a) Soit les matrices $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer MB, BM, Mu, uM et uv.

b) Calculer les produits matriciels suivants :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ne pas oublier de vérifier les calculs avec une calculatrice.

4) **Puissances de matrices**

a) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

i. Calculer A^2, et montrer qu'il existe un réel α tel que $A^2 = \alpha A$.

ii. En déduire la valeur de A^3, A^4, et plus généralement A^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Soit B la matrice égale à $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

i. Calculer A^2 et A^3.

ii. En déduire la valeur de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

i. Calculer C^2, C^3 et C^4.

ii. On admet l'existence, pour tout entier naturel non nul n, d'un réel a_n tel que $C^n = a_n C$.
Trouver une expression de a_{n+1} en fonction de a_n, et en déduire la valeur de C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) On considère les matrices

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i. Montrer que $PP' = P'P = I$, et que $D = P\Delta P'$.
ii. Calculer Δ^2, Δ^3, et vérifier que $D^2 = P\Delta^2 P'$ et $D^3 = P\Delta^3 P'$.
iii. On admet que Δ^n s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$. Trouver une relation entre a_n et a_{n+1}, et en déduire la valeur de Δ^n pour tout entier n non nul.
iv. Montrer que $D^n = P\Delta^n P'$ (en développant $(P\Delta P')(P\Delta P')\dots(P\Delta P')$, et en déduire la valeur de D^n en fonction de n.

5) **Calcul matriciel en vrac**

51) On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

i. Calculer A^2, et trouver deux réels x et y tels que $A^2 = xA + yI$.
ii. En déduire l'existence d'une matrice B telle que $AB = I$, et vérifier que $BA = I$.

52) Soit les matrices $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

i. Calculer UV, VU, U^2, V^2 et enfin $U^2 + 2UV + V^2$.
ii. Calculer $W = U + V$, puis W^2.
iii. Pourquoi selon vous ces deux résultats sont-ils différents ?

6) **Existe-t-il des matrices égales à leur carré ?**

a) Que peut-on dire des dimensions d'une matrice A égale à son carré $A \times A$?
b) Savez-vous répondre à la question posée pour des matrices carrées d'ordre 1 ?
c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.
Calculer M^2. Y a-t-il des valeurs de a et b pour lesquelles $M^2 = M$?
d) Un brillant élève propose le raisonnement suivant à son professeur (où I est la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et où O est la matrice nulle) :

$$M^2 = M \iff M^2 - M = O \iff M(M - I) = O \iff M = O \text{ ou } M = I$$

Le professeur lui fait remarquer qu'on a trouvé d'autres solutions que les deux solutions "évidentes" O et I ! Où l'élève s'est-il trompé ?

7) **Application à l'économie**

Une entreprise de confection de vêtements fabrique des jupes, des robes et des pantalons.

- Pour fabriquer une jupe, il faut 0,75m de tissu, 4 boutons et une fermeture Éclair.
- Pour fabriquer une robe, il faut 1,5m de tissu, 6 boutons et une fermeture Éclair.
- Pour fabriquer un pantalon, il faut 1,25m de tissu, 2 boutons et une fermeture Éclair.

On appelle x, y et z les quantités respectives de jupes, de robes et de pantalons confectionnés, et a, b et c les quantités de tissu (en mètres), de boutons et de fermeture Éclair utilisées pour la fabrication.

Enfin on considère les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 1{,}5 & 1{,}25 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

a) i. Vérifier que $B = MA$.
ii. Déterminer a, b et c pour la fabrication de 200 jupes, 120 robes et 320 pantalons.

b) On considère la matrice $M' = \begin{pmatrix} -1{,}6 & 0{,}1 & 1{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & -1{,}4 \\ 0{,}8 & -0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

   i. Calculer $M'M$.

   ii. Écrire la matrice A en fonction de B et de M'.

   iii. En déduire x, y et z quand on utilise 735m de tissu, 2 400 boutons et 620 fermetures Éclair.

c) L'entreprise a deux fournisseurs dont les prix de vente des différents produits sont donnés dans le tableau suivant :

	Prix du tissu (par m)	Prix d'un bouton	Prix d'une fermeture
Fournisseur 1	45	5	6
Fournisseur 2	48	4,5	5,5

On note C la matrice $\begin{pmatrix} 45 & 5 & 6 \\ 48 & 4{,}5 & 5{,}5 \end{pmatrix}$.

Calculer le produit CA. Que représente cette matrice ?