

CHAPITRE IV

Rappels et compléments sur les suites

SUITES NUMÉRIQUES 1

Sommaire

I	Notion de suite	30
A	Exemples	30
B	Définition	30
C	Deux modes de définition de suites	30
D	Comportement global	30
II	Suites classiques	31
A	Suites arithmétiques	31
B	Suites géométriques	31
III	Notion de limite	32
A	Limite finie	32
B	Limite infinie	33
C	Comparaison de suites	33
Feuille d'exercices n°4 – Rappels et compléments sur les suites		34

I Notion de suite

A Exemples

Complétez les débuts de séquences suivants :

- 1, 1, 1, 1, 1, ...
- 1, 3, 5, 7, 9, ...
- 1, 2, 4, 8, 16, ...
- $\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \dots$
- 100, 50, 25, 12,5, 6,25, ...
- 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...
- $\ln(1), \ln(2), \ln(3), \ln(4), \ln(5), \dots$
- 1, 11, 21, 1211, 111221, ...

B Définition

Une suite est un procédé associant à chaque entier naturel n un réel u_n . Ainsi, une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On notera $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou plus simplement $(u_n)_n$, ou (u_n)) la suite (i.e. la *fonction*), et u_n le terme de la suite associé à l'indice n (i.e. la *valeur* de la fonction en n).

On rencontre souvent les suites dans la description des algorithmes : on peut considérer la suite des états de la mémoire lors de l'exécution d'un programme, la suite des temps de calcul associée à la taille de l'entrée, qui nous permet de mesurer la complexité d'un algorithme, etc.

C Deux modes de définition de suites

- On peut définir la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *explicitement*, en se donnant une fonction associant à chaque entier n le réel u_n .

Par exemple, on peut définir les suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ par :

$$u_n = n^2 + 3n + 5, \quad v_n = \frac{2n+1}{n+3}, \quad w_n = \begin{cases} n^2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -2n-3 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Alors, on peut calculer directement :

$$u_7 = 7^2 + 3 \times 7 + 5 = 75, \quad v_5 = \frac{2 \times 5 + 1}{5 + 3} = \frac{11}{8}, \quad w_{13} = -2 \times 13 - 3 = -29$$

- On peut définir la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *par récurrence*, en se donnant une fonction permettant de passer d'un terme au suivant. Il faut alors se donner un terme initial u_0 .

Par exemple, on peut définir les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 0, v_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \end{cases}$$

Alors, pour calculer u_4 et v_5 , il faut calculer les termes intermédiaires :

$$u_1 = 2 \times u_0 + 3 = 3, \quad u_2 = 2 \times u_1 + 3 = 9, \quad u_3 = 2 \times u_2 + 3 = 21, \quad u_4 = 2 \times u_3 + 3 = 45$$

et

$$v_2 = v_1 + v_0 = 1, \quad v_3 = v_2 + v_1 = 2, \quad v_4 = v_3 + v_2 = 3, \quad v_5 = v_4 + v_3 = 5$$

Remarquons que cette deuxième méthode, si elle est plus naturelle, demande plus de calcul. Imaginez le nombre de calculs nécessaires pour obtenir la valeur de v_{1000} !

D Comportement global

Une propriété est particulièrement recherchée lors de l'étude d'une suite : son *sens de variation*.

DÉFINITION 1 : On dit que la suite $(u_n)_n$ est croissante si, pour tout entier n , $u_{n+1} \geq u_n$. Elle est dite strictement croissante si l'inégalité est toujours stricte.

Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$ (qui énumère les nombres impairs) est strictement croissante, puisque pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n = 2 > 0$, d'où $u_{n+1} > u_n$.

On définit de la même façon la notion de suite *décroissante*. Bien faire attention au fait que “décroissant” n’est pas le contraire de “croissant” : la plupart des suites ne sont **ni** croissantes, **ni** décroissantes, et certaines suites sont **à la fois** croissantes et décroissantes.

Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et $+1$, elle n’est ni croissante, ni décroissante.

Pouvez-vous trouver les suites qui sont à la fois croissantes et décroissantes ?

II Suites classiques

A Suites arithmétiques

DÉFINITION 2 : La suite (u_n) est dite arithmétique s’il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est alors appelé raison de la suite (u_n) .

Par exemple, si vous déposez tous les mois 100€ sur votre compte bancaire, la suite des sommes sur votre compte est une suite géométrique de raison 100.

Une suite arithmétique est ainsi définie par une relation de récurrence. On peut obtenir une relation explicite, qui caractérise d’ailleurs les suites de ce type :

THÉORÈME 1

- Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison r , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a + nr$.
- Réciproquement, une suite (u_n) définie par une relation de la forme $u_n = \alpha n + \beta$ est arithmétique, de raison α et de premier terme $u_0 = \beta$. ★

EXERCICE : La suite (u_n) est arithmétique, on sait que $u_3 = 5$, et $u_7 = 17$. Calculer son premier terme et sa raison.

Une autre formule nous intéresse parfois : la somme de termes consécutifs d’une suite arithmétique.

THÉORÈME 2

Si (u_n) est une suite arithmétique, et si p et q sont deux indices ($p < q$), alors

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{q-1} + u_q = \underbrace{q - p + 1}_{\text{nbre de termes}} \times \underbrace{\frac{u_p + u_q}{2}}_{\text{moyenne des termes extrêmes}} \quad \star$$

Par exemple, la somme des n premiers entiers est : $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

B Suites géométriques

DÉFINITION 3 : La suite (v_n) est dite géométrique s’il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n \times r$. Le réel r est alors appelé raison de la suite (v_n) .

Par exemple, si votre banque rémunère votre compte à 2% d’intérêts composés, la suite des sommes sur votre compte (après placement initial) est une suite géométrique de raison 1,02.

Une suite géométrique est ainsi définie par une relation de récurrence. On peut obtenir une relation explicite, qui caractérise d’ailleurs les suites de ce type :

THÉORÈME 3

- Si (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = a$ et de raison r , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a \times r^n$.
- Réciproquement, une suite (v_n) définie par une relation de la forme $v_n = \beta \times \alpha^n$ est géométrique, de raison α et de premier terme $u_0 = \beta$. ★

EXERCICE : La suite (v_n) est géométrique, de premier terme $v_0 = 100$, et de raison 1,05. Calculer v_{10} , ainsi que la première valeur de n telle que $v_n \geq 2v_0$.

Une autre formule nous intéresse parfois : la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

THÉORÈME 4

Si (v_n) est une suite géométrique de raison $r \neq 1$, et si p et q sont deux indices ($p < q$), alors

$$v_p + v_{p+1} + \cdots + v_{q-1} + v_q = v_p \times \frac{1 - r^{q-p+1}}{1 - r} \quad \star$$

Par exemple, la somme des n premières puissances de 2 est : $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$.

III Notion de limite

A Limite finie

Quand les valeurs d'une suite (u_n) sont de plus en plus proches d'un réel ℓ donné, on dit que cette suite a pour limite ℓ . Plus précisément :

DÉFINITION 4 : On dit que la suite $(u_n)_n$ a pour limite 0 si u_n peut être rendu arbitrairement petit, pourvu que n soit suffisamment grand.

On dit que la suite (u_n) a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ si la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \ell$ a pour limite 0.

Voici quelques exemples de référence :

PROPRIÉTÉ 1

Les suites suivantes ont pour limite 0 :

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ et plus généralement } \left(\frac{1}{n^k}\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ pour } k \in \mathbb{N}^*, (a^n)_n \text{ pour } 0 < a < 1$$

Preuve Démontrons-le pour la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$: si $\varepsilon > 0$ est un "petit" nombre réel, alors $\frac{1}{n} < \varepsilon$ équivaut à $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Donc dès que n est plus grand que N , premier entier plus grand que $\frac{1}{\varepsilon}$, $0 < u_n < \varepsilon$.

Ces exemples de références permettent, à l'aide de raisonnement simple, d'obtenir d'autres limites.

EXEMPLE : Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{3n^2 + 1}{n^2 + 2n + 4}$. Une expérimentation à la calculatrice montre que pour de grande valeur de n , u_n est très proche de 3. Essayons de comprendre pourquoi :

$$u_n = \frac{n^2 \left(3 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right)} = \frac{3 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}}$$

Le numérateur de cette fraction a pour limite 3, le dénominateur a pour limite 1, on comprend pourquoi le quotient u_n a pour limite 3.

Cet exemple illustre une méthode générale pour obtenir des limites : lorsqu'on pense qu'une quantité est déterminante dans le calcul d'une limite (par exemple la plus grande puissance de l'entier n), on la factorise, et regarde ce qui reste à coté.

B Limite infinie

Le plus souvent, le temps de calcul d'un algorithme manipulant des tableaux de taille n devient de plus en plus grand au fur et à mesure que n augmente. Par exemple, l'algorithme de "tri à bulles" trie un tableau de taille n en faisant de l'ordre de $\frac{n^2}{2}$ comparaisons entre éléments du tableau. Pour $n = 1000$, on fait 5.10^5 comparaisons, pour un tableau de taille 10 000, on fera 5.10^7 comparaisons, etc. On peut très facilement imaginer la taille nécessaire d'un tableau pour que le temps de tri dépasse, disons, l'âge de l'univers !

Quand une suite a un tel comportement, on dit qu'elle a pour limite $+\infty$. Plus précisément :

DÉFINITION 5 : On dit que la suite $(u_n)_n$ a pour limite $+\infty$ si u_n peut être rendu arbitrairement grand, pourvu que n soit suffisamment grand.

Voici quelques exemples à connaître :

PROPRIÉTÉ 2

Les suites suivantes ont pour limite 0 :

$$(n^k)_{n \in \mathbb{N}} \text{ pour } k \in \mathbb{N}^*, (\log_a n)_n \text{ et } (a^n)_n \text{ pour } a > 1$$

Preuve Démontrons-le pour la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = n^2$: si $A > 0$ est un "grand" nombre réel, alors $n^2 > A$ équivaut à $n > \sqrt{A}$. Donc dès que n est plus grand que N , premier entier plus grand que $\sqrt{A}$, $u_n > A$.

C Comparaison de suites

Très souvent, c'est moins la limite d'une suite (u_n) qui nous intéresse (en algorithmique, malheureusement, l'immense majorité des complexités, spatiales ou temporelles, a pour limite $+\infty$) que la comparaison de (u_n) à d'autres suites.

DÉFINITION 6 : On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes si la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ a pour limite 1.

On dit que (u_n) est prépondérante devant (v_n) (ou que (v_n) est négligeable devant (u_n)) si la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ a pour limite $+\infty$.

Ainsi, si deux suites (u_n) et (v_n) ont pour limite $+\infty$, dire que (u_n) est prépondérante devant (v_n) signifie que (u_n) tend beaucoup plus vite vers $+\infty$ que (v_n) .

PROPRIÉTÉ 3

Si p et q sont deux entiers, $p < q$, et si a et b sont deux réels tels que $1 < a < b$, alors :

$$(\log_a n) \ll (n^p) \ll (n^q) \ll (a^n) \ll (b^n)$$

$(u_n) \ll (v_n)$ signifiant que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) . ★

Ainsi, par exemple, l'algorithme de "tri à bulles", dont la complexité temporelle est de l'ordre de $n^2/2$, est *asymptotiquement* moins performant que l'algorithme de "tri fusion", dont la complexité temporelle est de l'ordre de $n \log_2 n$, car :

$$\frac{n^2/2}{n \log_2 n} = \frac{n}{2 \log_2 n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$