DL option informatique

Exercice 1 : recherches dans une liste d'entiers

On considère une liste d'entiers `l=[n1;...,np]`. On souhaite rechercher des éléments particuliers de cette liste.

1. Ecrire deux fonctions renvoyant le minimum (resp. le maximum) de la liste l.
2. On recherche simultanément le minimum et le maximum de la liste l.
   (a) Trouver un algorithme renvoyant le minimum et le maximum d'une liste d'entiers en réalisant au plus $2n-2$ comparaisons.
   (b) On adopte la stratégie suivante : on traite les éléments par paires : on commence par les comparer entre eux, puis on compare le plus petit au minimum et le plus grand au maximum.
   Ecrire une fonction implémentant cet algorithme.
   Calculer le nombre de comparaisons effectuées. Peut-on faire mieux ?
3. Ecrire une fonction recherchant le deuxième plus petit élément.
4. On recherche ici le $i$ème *rang statistique* de la liste l, c'est-à-dire l'élément $x \in l$ qui est plus grand que $i-1$ autres éléments de l exactement. Pour cela, on utilise la statégie «diviser pour régner» suivante, inspirée de l'algorithme de tri rapide (*quick sort*) :
   - On partitionne la liste l en deux sous-liste l_1 et l_2 de sorte que tous les éléments de l_1 soient inférieurs à tous les éléments de l_2.
   - Compter le nombre k d'éléments de la liste l_1. Si ce nombre est inférieur à i, on cherchera le $i-k$ème rang statistique de l_2, sinon on cherchera le $i$ème rang statistique de l_1.

   (a) Ecrire une fonction `partition` réalisant la partition. On utilisera un pivot (par exemple le premier élément de la liste), on rangera dans les deux listes les éléments moins grands (respectivement plus grand) que le pivot.
   (b) Ecrire la fonction `selection` renvoyant le $i$ème rang statistique d'une liste.
   (c) Evaluer la complexité temporelle de `selection` dans le pire cas.
   (d) On suppose que la fonction de partition découpe la liste l en deux listes dont la longueur est égale (p est une puissance de 2). Evaluer la complexité dans ce cas.
   (e) Que se passe-t-il si la fonction de partition découpe la liste l de longueur p en deux listes de longueurs respectives $p/10$ et $9p/10$?

Exercice 2 : calculs en multiprécision

Les opérations arithmétiques en multiprécision se réalisent de la façon suivante. Soient $N > 0$ et $b \geqslant 2$ des entiers ; b est la *base*, N est le nombre de *chiffre* dans cette base. Un nombre décimal u à N chiffres après la virgule, tel que $-b < u < b$, s'écrit de façon unique

$$u = \sum_{i=0}^{N} u_i b^{-i}$$

où $0 \leqslant u_i < b$ pour $i \in [\![1, N]\!]$, et $0 \leqslant |u_0| < b$. La suite $(u_0, \ldots, u_N)$ est la *représentation de u en base b*, les u_i en sont les *chiffres*. On écrira $u = (u_0, \ldots, u_n)$. La représentation de 0 est (0).

Les opérations arithmétiques sont à implémenter dans cette représentation. Pour cet exercice, on prendra $b = 1000$ et $N = 10$ (ou plus). Les nombres en multiprécision seront représentés par un tableau d'entiers de taille $N+1$.

1. Ecrire une procédure pour l'addition des nombres en multiprécision.
2. Ecrire des procédures pour la soustraction de deux nombres.
   En déduire une procédure réalisant la comparaison de deux nombres.

3. Ecrire une procédure réalisant la multiplication de deux nombres en multiprécision. On pourra commencer par écrire une procédure réalisant le produit d'un chiffre par un nombre, et une autre réalisant la multiplication d'un nombre par $1/b$ (décalage).

4. On souhaite calculer un grand nombre de décimales de π au moyen de la formule suivante, dûe à Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arc}\tan \frac{1}{5} - \operatorname{Arc}\tan \frac{1}{239}$$

On pose

$$S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{et} \quad R_n(u) = |\operatorname{Arc}\tan u - S_n(u)|$$

(a) Montrer que $R_n(u) \leqslant \frac{|u|^{2n+3}}{2n+3}$.

(b) En déduire que pour avoir p «chiffres» (en base b) de $\operatorname{Arc}\tan \frac{1}{x}$, où $x > 1$ est un entier, il suffit de calculer $S_n(\frac{1}{x})$ avec $n > \frac{1}{2}(\frac{p \ln b}{\ln x} - 3)$.

(c) Montrer que si $x < b$ et $2n + 1 < b$, $S_n(\frac{1}{x})$ peut être évalué par le schéma de Hörner, et que seules des multiplications ou divisions par des entiers $< b$ sont nécessaires.

(d) Ecrire une fonction qui prend en argument un entier $x > 1$ et un entier N, et qui calcule N chiffres en base b de $\operatorname{Arc}\tan \frac{1}{x}$.

(e) Ecrire une fonction calculant p chiffres (en base 10, cette fois !) de π.