PROBLÈME III
DANS L'ESPACE TOUT ENTIER

On rappelle qu'un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers, avec $b \neq 0$. En particulier, la somme, la différence, le produit et le quotient de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.
L'espace usuel $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Un point $M(x; y; z)$ de $\mathscr{E}$ est dit *entier* lorsque ses trois coordonnées x, y et z sont des entiers.
De même, un point $M(x; y)$ du plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sera dit *entier* lorsque ses deux coordonnées x et y sont des entiers.
Dans tout le problème, les triangles seront supposés *non aplatis*.

Partie A : Quelques résultats préliminaires

1° Soit ABC un triangle du plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, et H le pied de sa hauteur issue de A (c'est-à-dire H est le point d'intersection entre la droite (BC) avec la perpendiculaire passant par A).

(a) Prouver que :
$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BC^2} \times \overrightarrow{BC}$$

(b) En déduire que si A, B et C sont des points entiers du plan $\mathscr{P}$ alors les coordonnées de H sont des nombres rationnels.

(c) Si ABC est un triangle de l'espace $\mathscr{E}$, les résultats établis aux questions (a) et (b) ci-dessus sont-ils encore valables ?

2° Existe-t-il un triangle équilatéral dont les sommets sont trois points entiers du plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$?

3° Soit n un entier naturel. Prouver que si $\sqrt{n}$ est un nombre rationnel alors il existe un entier m tel que $n = m^2$.

4° (a) Prouver que si x est un entier alors il existe un entier t tel que x^2 soit égal à $8t$ ou à $8t+1$ ou à $8t+4$.

(b) Prouver que si a, b, c et d sont des entiers tels que $7a^2 = b^2 + c^2 + d^2$, alors $a = b = c = d = 0$.

Partie B : Étude des triangles de l'espace $\mathscr{E}$ à sommets entiers

On rappelle que si θ est la mesure en radian d'un angle non droit d'un triangle (non aplati), on a $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.
Un entier $k \geqslant 1$ est dit *sans facteur carré* si $k = 1$ ou s'il peut se décomposer en un produit de nombres premiers deux à deux distincts.

1° Donner un triangle équilatéral dont les sommets sont trois points entiers de l'espace $\mathscr{E}$.

2° Soit T un triangle dont les sommets sont des points entiers de l'espace $\mathscr{E}$.

(a) Prouver que, pour tout angle θ non droit de T, le nombre $\tan^2(\theta)$ est rationnel.

(b) Prouver qu'il existe un unique entier $k \geqslant 1$, sans facteur carré, tel que pour tout angle θ non droit de T, le nombre $\tan(\theta)$ puisse s'écrire sous la forme $r\sqrt{k}$, où r est un nombre rationnel non nul.

(c) En utilisant la question A-1°, prouver qu'il existe des entiers a_1, a_2, a_3, u_1, u_2 et u_3 non tous nuls vérifiant le système :
$$E(3,k) \quad \begin{cases} k\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \\ a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0 \end{cases}$$

(*Remarque* : L'entier k est celui trouvé à la question 2°-(b).)

3° Soit k un entier strictement positif et sans facteur carré. On suppose qu'il existe des entiers a_1, a_2, a_3, u_1, u_2 et u_3 non tous nuls vérifiant le système $E\,(3,k)$.

Soit T un triangle de l'espace $\mathscr{E}$. On suppose que, pour tout angle θ non droit de T, le nombre $\tan(\theta)$ peut s'écrire sous la forme $r\sqrt{k}$, où r est un nombre rationnel non nul.

Montrer qu'il existe un triangle dont les trois sommets sont entiers et ayant les mêmes angles que T.

4° (a) Soit T un triangle isocèle de l'espace $\mathscr{E}$ dont les côtés sont de longueur 3, 3 et 2.
Existe-t-il un triangle de l'espace $\mathscr{E}$ dont les trois sommets sont entiers et ayant les mêmes angles que T ?

(b) Soit T un triangle isocèle de l'espace $\mathscr{E}$ dont les côtés sont de longueur 2, 2 et 3.
Existe-t-il un triangle de l'espace $\mathscr{E}$ dont les trois sommets sont entiers et ayant les mêmes angles que T ?

(*Remarque* : on pourra librement utiliser l'identité suivante, valable pour tous réels a, b, c, d, e et f :

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(d^2+e^2+f^2\right)-(ad+be+cf)^2=(ae-bd)^2+(af-cd)^2+(bf-ce)^2$$

Corrigé

Partie A : Quelques résultats préliminaires

1° (a) Notons x le réel tel que $\overrightarrow{BH}=x\overrightarrow{BC}$ (c'est l'abscisse de H sur la droite (BC) repérée par le repère $\left(B;\overrightarrow{BC}\right)$).

On a $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{BC}$, et $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$, donc :

$$0=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+xBC^2$$

donc $x=-\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}}{BC^2}=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BC^2}$, et on a bien

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BC^2}\overrightarrow{BC}$$

(b) Si A, B et C sont trois points entiers du plan $\mathscr{P}$, alors $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont à coordonnées entières, donc leur produit scalaire aussi. Ainsi x est un rationnel, et le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est la somme d'un vecteur à coordonnées entières et d'un rationnel multiplié par un vecteur à coordonnées entières.

Ainsi, $\overrightarrow{AH}$ est à coordonnées rationnelles, et comme A est à coordonnées entières, H est à coordonnées rationnelles.

(c) La relation trouvée au (a) est tout à fait générale, elle permet de trouver les coordonnées du *projeté* H du point A sur la droite (BC) (qui est le point d'intersection de (BC) avec l'orthogonal de (BC) passant par A, une droite dans le cas du plan $\mathscr{P}$, un plan dans le cas de l'espace $\mathscr{E}$).

Ainsi si ABC est un triangle de l'espace dont les sommets sont des points entiers, alors le pied H de la hauteur issue de A du triangle ABC est à coordonnées rationnelles.

2° Si A, B et C sont les trois sommets d'un triangle équilatéral du plan, et si par exemple B et C sont à coordonnées entières, alors le pied H de la hauteur issue de A est le milieu du segment $[BC]$, donc il est à coordonnées rationnelles.

On sait que le rapport $\frac{AH}{BC}$ est égal à $\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc on doit avoir $\left(\frac{2AH}{BC}\right)^2=3$.

Si A était à coordonnées entières, BC^2 et AH^2 devrait être des rationnels, donc

A TERMINER.

3° Supposons que n ne soit pas le carré d'un entier. Alors dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n, l'un des facteurs apparaît avec une puissance impaire. Notons le r.

Supposons alors que $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$, avec p et q entiers premiers entre eux. On doit donc avoir : $q^2n=p^2$.
p^2 est divisible par une puissance *impaire* de r, donc p est lui-même divisible par r.

Mais alors p^2 est divisible par une puissance *paire* de r, donc q^2 doit être divisible par r, d'où q doit être divisible par r. Ainsi, contrairement à l'hypothèse, la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible.

L'hypothèse initiale ne tient donc pas, et $\sqrt{n}$ ne peut être rationnel.

Ainsi $\sqrt{n}$ rationnel implique donc que n est un carré parfait, et la réciproque est évidente.

4° (a) Effectuons la division euclidienne de x par 8 : $x = 8k + r$, avec $0 \leqslant r \leqslant 7$. On a alors :

$$x^2 = 64k^2 + 16kr + r^2 = 8\left(8k^2 + 2kr\right) + r^2$$

donc le reste de la division euclidienne de x^2 par 8 est celui de la division euclidienne de r^2 par 8 (ceux qui connaissent les congruences iront plus vite sur cette question !).

Cherchons donc ces restes :

r	0	1	2	3	4	5	6	7
r^2	0	1	4	9	16	25	36	49
reste	0	1	4	1	0	1	4	1

Ainsi, x^2 est bien de la forme $8t$, $8t+1$ ou $8t+4$.

(b) Soit a, b, c et d quatre entiers tels que $7a^2 = b^2 + c^2 + d^2$. Supposons que ces nombres ne soient pas tous nuls.

Le reste de la division euclidienne de $b^2 + c^2 + d^2$ peut prendre, d'après ce qui précède, toutes les valeurs entre 0 et 6, mais pas la valeur 7.

D'autre part, le reste de la division euclidienne de $7a^2$ par 8 peut prendre les valeurs 0, 7 ou 4.

Les seules valeurs communes sont 0 et 4, ce qui entraîne que a, b, c et d sont tous les quatre pairs. En les divisant par 2, on obtient donc une nouvelle égalité identique $7{a'}^2 = {b'}^2 + {c'}^2 + {d'}^2$ avec des nombres entiers a', b', c' et d' plus petits.

En recommençant cette opération, on finit par arriver au cas où au moins l'un des quatre entiers est impair, ce qui est absurde d'après ce que l'on vient de dire.

Ainsi, la seule solution possible au problème est la solution nulle.

Partie B : Étude des triangles de l'espace $\mathscr{E}$ à sommets entiers

1° Soit $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$. Le triangle ABC est clairement équilatéral (de coté $\sqrt{2}$), et a ses sommets de coordonnées entières.

2° (a) Si H est le pied de la hauteur issue de A, et que l'angle $\theta_B = \widehat{ABC}$ n'est pas droit, on a :

$$\tan^2(\theta_B) = \left(\frac{AH}{BH}\right)^2 = \frac{AH^2}{BH^2}$$

qui est, d'après ce que l'on a vu précédemment, un rationnel.

(b)

(c)

3°

4° (a)

(b)