Khôlle PCSI n° 10 : fonctions usuelles, fonctions à valeurs complexes

Fonctions usuelles

1. Simplifier les expressions suivantes :

   (a) $\operatorname{Arc}\cos\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

   (b) $\operatorname{Arc}\cos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

   (c) $\operatorname{Arc}\sin\sqrt{1-x^2}-\operatorname{Arc}\tan\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

   (d) $\operatorname{Arc}\tan\dfrac{1+x}{1-x}$

   (e) $\sin\left(3\operatorname{Arc}\tan x\right)$

   (f) $\operatorname{Arc}\tan\left(\operatorname{cotan}2x\right)$

2. Calculer $\operatorname{Arc}\tan\dfrac{1}{2}+\operatorname{Arc}\tan\dfrac{1}{5}+\operatorname{Arc}\tan\dfrac{1}{8}$.

3. Résoudre les équations suivantes :

   (a) $\operatorname{Arc}\sin 2x=\operatorname{Arc}\sin x+\operatorname{Arc}\sin x\sqrt{2}$

   (b) $\operatorname{Arc}\cos x=\operatorname{Arc}\sin 2x$

   (c) $\operatorname{Arc}\sin\dfrac{2x}{1+x^2}=\operatorname{Arc}\tan x$

   (d) $\operatorname{Arc}\sin\dfrac{2x}{1+x^2}+\operatorname{Arc}\cos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}+\operatorname{Arc}\tan\dfrac{2x}{1-x^2}=\dfrac{3\pi}{4}$

   (e) $\operatorname{Arc}\tan x+\operatorname{Arc}\tan x\sqrt{3}=\dfrac{7\pi}{12}$

   (f) $\operatorname{Arc}\sin x=\operatorname{Arc}\sin\dfrac{4}{5}+\operatorname{Arc}\sin\dfrac{5}{13}$

4. Résoudre les équations suivantes :

   (a) $3^{2x}-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{7}{2}}-3^{2x-1}$

   (b) $2^{2x}-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

   (c) $\ln\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{1}{2}\left(\ln x+\ln 3\right)$

   (d) $\left(\sqrt{x}\right)^x=x^{\sqrt{x}}$

   (e) $\ln|x-1|-2\ln|x|+\ln|x+1|<1$

5. Trouver $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

6. Soient a et b deux réels strictement positifs. Trouver $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}$.

7. Montrer que $\forall x\in]0,1[,\ x^x\left(1-x\right)^{1-x}\geqslant\dfrac{1}{2}$.

8. Montrer que $4\operatorname{Arc}\tan\dfrac{1}{5}-\operatorname{Arc}\tan\dfrac{1}{239}=\dfrac{\pi}{4}$.

9. Montrer que $\operatorname{th}x=\dfrac{2}{\operatorname{th}2x}-\dfrac{1}{\operatorname{th}x}$. En déduire une forme plus simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k\operatorname{th}\left(2^kx\right)$.

10. Evaluer $P_n\left(x\right)=\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\cos\frac{x}{2^k}$ (resp. $Q_n\left(x\right)=\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\operatorname{ch}\frac{x}{2^k}$).

    En déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_n$ (resp. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}Q_n$).

11. Etudier les fonctions suivantes :

- $f_1 : x \mapsto \operatorname{Arc}\cos(\cos x)$
- $f_2 : x \mapsto \operatorname{Arc}\sin\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{t}} + \operatorname{Arc}\sin\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{t}}$

12. (a) Soient x et y tels que $xy < 1$. Montrer que $\operatorname{Arc}\tan x + \operatorname{Arc}\tan y = \operatorname{Arc}\tan \frac{x+y}{1-xy}$.

    (b) En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Arc}\tan \frac{1}{n^2+n+1}$.

    (c) Mettre $z_k = \frac{k^2+k+1+i}{k^2+k+1-i}$ sous forme trigonométrique. En déduire $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} z_k$.

13. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(a+kb)$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(a+kb)$, puis $\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_n^k \operatorname{ch}(a+kb)$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_n^k \operatorname{sh}(a+kb)$.

14. Calculer $\sum_{k=1}^{n} k \operatorname{sh} kx$.

15. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Peut-on trouver A et φ réels tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = A \operatorname{ch}(x+\varphi)$ (resp. $A \operatorname{sh}(x+\varphi)$) ?

    En déduire la résolution de l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = 0$.

16. Résoudre :

    (a) $\operatorname{sh} a + \operatorname{sh}(a+x) + \operatorname{sh}(a+2x) + \operatorname{sh}(a+3x) = 0$ $(a \in \mathbb{R})$

    (b) $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = a \operatorname{ch} \alpha \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = a \operatorname{sh} \alpha \end{cases}$

17. Résoudre $2 \operatorname{Arg}\operatorname{sh} x = \operatorname{Arg}\operatorname{ch} 3 - \operatorname{Arg}\operatorname{th} \frac{7}{9}$.

18. On pose $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$, et $f(0) = 0$.

- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{*+}$, et que $f^{(n)}(x)$ est de la forme $\frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}$, où $P \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$.
- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.
- Montrer que P_n possède $(n-1)$ racines dans $\mathbb{R}^{*+}$.

Suites et fonctions à valeurs complexes

1. Montrer que si (u_n) tend vers $\alpha \in \mathbb{C}$, alors $(|u_n|)$ tend vers $|\alpha|$. Qu'en est-il de la réciproque ?

2. Soit $w \in \mathbb{C}$. Etudier la suite $(w^n)_n$.
   Tirer du cas particulier $|w| = 1$ l'étude des suites $(\sin(n\theta + \varphi))$ et $(\cos(n\theta) + \varphi)$, où $0 < \theta < \pi$.

3. Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| < 1$. On pose $A_n = 1 + w + \cdots + w^n$, et $B_n = 1 + 2w + \cdots + nw^n$. En multipliant chacune de ces suites par $1 - w$, étudier l'existence de leurs limites.

4. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable. Montrer que $e^f : t \mapsto e^{f(t)}$ est dérivable sur I, et calculer sa dérivée.

5. On suppose f dérivable de I dans $\mathbb{C}$. Montrer que $|f|$ est dérivable en tout point de I en lequel f ne s'annule pas, et calculer cette dérivée.

6. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable, ne prenant jamais pour valeur un réel négatif ou nul.
   On pose $\varphi(t) = \ln|f(t)| + i\operatorname{Arg} f(t)$. Montrer que φ est dérivable sur I, et que $\varphi' = \dfrac{f'}{f}$.

7. Calculer les dérivées successives de $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = e^{\alpha t} t^p$ (α complexe, p réel).

8. Calculer les dérivées successives de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x^2 + a^2}$ (DES complexe).

9. Trouver les primitives de la fonction $f : t \mapsto \sqrt{t}\cos\ln t$ $(= \Re t^{\frac{1}{2}+i})$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction $g : t \mapsto \dfrac{n}{t^n - 1}$ peut s'écrire : $g(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{t - \omega_k}$, où $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.
    En déduire une primitive de cette fonction, et simplifier le résultat dans les cas $n = 6$ et $n = 8$.

11. Trouver les primitives des fonctions $f : t \mapsto \cos t \operatorname{ch} t$ et $g : t \mapsto te^t \sin t$.

12. Démontrer que si $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux, alors $\left|\displaystyle\int_a^b g(t)\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |g(t)|\, \mathrm{d}t$.
    Etudier le cas d'égalité.

13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue de période $T > 0$, et de moyenne k.
    (a) A quelle condition l'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$ est-elle périodique ?
    (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t = k$.

14. Montrer que $\forall (t, u) \in \mathbb{R}^2$, $\left|e^{it} - e^{iu}\right| \leqslant |t - u|$. Interprétation géométrique ?
    (la longueur de la corde joignant deux points d'un cercle est inférieure à la longueur de l'arc sous-tendu).

15. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \cos^n t \cos nt\, \mathrm{d}t$ pour tout entier n
    $(2^{n+1}\cos^n t \cos nt = \left(e^{it} + e^{-it}\right)^n \left(e^{int} + e^{-int}\right) = \ldots$, l'intégrale vaut $\dfrac{\pi}{2^n}$).