Khôlle PCSI n° 11 : Taylor, DL, primitives

Développements limités

1. Calculer les développements limités suivants :

   (a) $e^x\sqrt{1+x},\ 3,\ 0$
   (b) $e^{-x}\dfrac{1+x}{x},\ 3,\ 1$
   (c) $\operatorname{sh} x\left(\sin x - x\right),\ 7,\ 0$
   (d) $\dfrac{e^x}{\sqrt{x}},\ 3,\ 1$
   (e) $\left(1-\cos x\right)\left(1-\operatorname{ch} x\right),\ 9,\ 1$
   (f) $\operatorname{Arc}\sin x,\ n,\ 0$
   (g) $\tan x,\ 6,\ 0$ (division, puis $\tan' = 1+\tan^2$

2. Calculer les développements limités suivants (composition) :

   (a) $\sqrt{1+\sin x},\ 3,\ 0$
   (b) $\sin\left(\ln\left(1+x\right)\right),\ 4,\ 0$
   (c) $\ln\left(\cos x\right),\ 6,\ 0$
   (d) $\sqrt{1+\sqrt{1+x}},\ 3,\ 0$
   (e) $e^{\sqrt{\ln(\alpha+x)}},\ 2,\ 0\ \ (\alpha>1)$

3. Calculer les développements limités suivants (quotient) :

   (a) $\tan x,\ 6,\ 0$
   (b) $\dfrac{2+\sin x}{3+\cos x},\ 3,\ 0$
   (c) $\dfrac{\ln\left(1+\tan x\right)}{1+\sin x},\ 4,\ 0$
   (d) $\dfrac{\sin x}{\ln\left(1+x\right)},\ 3,\ 0$
   (e) $\dfrac{2\tan x-\tan 2x}{\left(1-\cos 3x\right)\ln\left(1+x\right)},\ 2,\ 0\ \ (\alpha>1)$

4. Trouver le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x\mapsto \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

5. Trouver le développement limité à l'ordre n en 0 de $x\mapsto\left(1+x\right)^{-k}$, où $k\in\mathbb{N}^*$.

6. Soit $f : x\mapsto 1+x+x^2+x^3\sin\dfrac{1}{x}$.
   Prolonger f par continuité en 0. Montrer que le prolongement ainsi obtenu est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, mais n'est pas deux fois dérivables en 0.

7. Etudier les fonctions suivantes au voisinage de l'infini :
   $$f : x\mapsto x\operatorname{Arc}\tan\left(x-1\right)\qquad g : x\mapsto e^{1/x}\sqrt{x\left(x+2\right)}\qquad h : x\mapsto \frac{2\left(x-1\right)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$$

8. Trouver les limites suivantes :
   $$\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{x}{x-\sin x}}\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}}{3}\right)^x\ \ (a,b,c>0)\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{Arc}\tan\left(x+1\right)}{\operatorname{Arc}\tan x}\right)^{x^2}$$

9. Trouver des équivalents en 0 des fonctions suivantes :
   $$f : x\mapsto \sin\left(\ln\left(1+x\right)\right)-\ln\left(1+\sin x\right)\qquad g : x\mapsto\sin\left(\operatorname{sh} x\right)-\operatorname{sh}\left(\sin x\right)\qquad h : x\mapsto\left(1+e^x\right)^x-\left(1+e^{-x}\right)^x$$

10. Trouver a et b de sorte que $\sin x-\dfrac{x+ax^3}{1+bx^2}$ soit, en 0, un infiniment petit d'ordre maximum.

11. Soit $P=X+aX^3+bX^5+cX^7$, et $Q=X+\alpha X^3+\beta X^5+\gamma X^7$. Trouver la partie principale du $DL_7\left(0\right)$ de $P\circ Q-Q\circ P$.
    En déduire le développement limité à l'ordre 7 de $\operatorname{Arc}\sin\left(\operatorname{Arc}\tan x\right)-\operatorname{Arc}\tan\left(\operatorname{Arc}\sin x\right)$.

12. Etudier les fonctions suivantes :
   (a) $f : x \mapsto x^{\frac{1}{1+\ln x}}$, étude au voisinage de 1
   (b) $g : x \mapsto \dfrac{x-1}{x \ln x}$
   (c) $h : x \mapsto (1+\sin x)^{\cos x}$, étude au voisinage de 0
   (d) $i : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{Arc}\sin x}$, étude au voisinage de 0
   (e) $j : x \mapsto \dfrac{x^2-x+2}{x+3} e^{-\frac{1}{x}}$, “tude au voisinage de $+\infty$.

Taylor

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$ et $\exists \lambda > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sup\limits_{\mathbb{R}} \left| f^{(n)} \right| \leqslant \lambda^n n!$.

   Montrer que f est nulle sur l'intervalle $\left] -\dfrac{1}{\lambda}, \dfrac{1}{\lambda} \right[$, puis sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et tous $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) > 0$ (fonction absolument monotone).

   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^n} = +\infty$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 1$, et $\forall x \geqslant \dfrac{1}{2}$, $f(x) = 0$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},, \sup\limits_{\mathbb{R}^+} \left| f^{(n)} \right| \geqslant 2^n n!$.
   (b) Montrer que $\forall n \geqslant 1,, \sup\limits_{\mathbb{R}^+} \left| f^{(n)} \right| > 2^n n!$ *(étudier la fonction $g : x \mapsto f(x) - (1-2x)^n$).*

4. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On note $M_2 = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$.
   (a) Montrer que $\forall x \in]a,b[$, $\left| f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \right| < M \dfrac{b-a}{2}$ *(écrire la formule de Taylor pour $f(a)$ et $f(b)$).*
   (b) Si $\left| f'(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \right| = M \dfrac{b-a}{2}$, montrer que f est polynômiale de degré au plus 2 *(étudier $f(x) - f(a) - (x-a) f'(a) \pm M \dfrac{(x-a)^2}{2}$).*

5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Pour a fixé, on écrit la formule de Tayolr-Lagrange :

$$f(a+h) = f(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + h\theta_h)$$

   Montrer que si $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, alors pour h suffisamment petit, θ_h est unique, et que $\theta_h \xrightarrow[h \to 0]{} \dfrac{1}{n+1}$ *(appliquer la formule de Taylor à l'ordre 1 à $f^{(n)}$ et à l'ordre $n+1$ pour f, et comparer tout cela).*

6. Soit f une fonction continue sur I contenant a. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe une unique fonction $F \in \mathcal{C}^p$ telle que $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $F^{(k)}(a) = 0$, et $F^{(p)} = f$.

   Donner une expression intégrale de F, et trouver toutes les fonctions G telles que $G^{(p)} = f$.

7. Retrouver la formule du développement limité de l'exponentielle en 0 à l'aide du théorème de Taylor avec reste intégral.

8. Trouver un encadrement de sin par deux polynômes de degré 5 sur $[0, +\infty[$. En déduire des encadrements de $\sin \dfrac{1}{2}$ et $\sin \dfrac{3}{2}$.

9. Ecrire l'inégalité de Taylor-Lagrange pour $f : c \mapsto \ln(1+x)$ en 0. Qu'en déduit-on pour $\ln 2$?

Primitives

1. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

   (a) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3-1}$

   (b) $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^3+1}$

   (c) $h_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x^4+1}$, puis $h_2 : x \mapsto \dfrac{1}{\left(x^4+1\right)^2}$.

   (d) $i : x \mapsto \dfrac{\tan x}{1+\tan x}$

   (e) $j : x \mapsto x^k \ln x,\ k \in \mathbb{N}$

   (f) $k : x \mapsto e^{\mathrm{Arc\,sin}\,x}$

   (g) $l : x \mapsto \left(x^2+x+1\right) e^{2x} \cos x$

   (h) $m : x \mapsto \ln\left(1+x^2\right)$

2. Calculer les intégrales définies suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{16}$

   (b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^3 t \,\mathrm{d}t = \frac{4}{15}$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin t}$

   (d) $\displaystyle\int_4^9 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}-1} = 2 + 2\ln 2$

   (e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2}$

   (f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4} - 2$