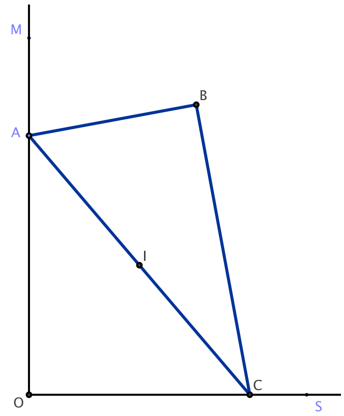
Préparation de l'épreuve expérimentale[1]

Sujet 5 : Dans le plan $\mathscr{P}$, on donne 4 points O, A, B et C, et un cercle $\mathscr{C}$ de centre O. Le point M est un point quelconque variable sur le cercle $\mathscr{C}$. On associe au point M l'unique point M' du plan $\mathscr{P}$ défini par l'égalité $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$. Il s'agit de déterminer le lieu géométrique $\mathscr{L}$ du point M' lorsque M parcourt le cercle $\mathscr{C}$.

1) (a) À l'aide d'un logiciel de géométrie plane, construire les points O, A, B et C, le cercle $\mathscr{C}$ et un point libre M sur ce cercle.
   (b) Construire le point M' associé à M. En observant plusieurs positions du point M, faire une conjecture sur la nature de la transformation du plan qui transforme M en M', ainsi que la nature du lieu géométrique $\mathscr{L}$.
2) Déterminer par le calcul la nature de la transformation du plan qui transforme le point M en le point M'. En déduire le lieu géométrique $\mathscr{L}$ du point M'.

Sujet 6 : Le triangle ABC représente une équerre telle que $AB = 3$, $AC = 6$ et l'angle en B est droite. Les points A et C glissent respectivement sur les demi-droites perpendiculaires $[OM)$ et $[OS)$. Le point I est le milieu du segment $[AC]$. On s'intéresse au lieu du point B.

1) Observer les propriétés géométriques de la figure. Avec un logiciel de géométrie, construire une figure dynamique illustrant la situation.
2) Visualiser, à l'aide du logiciel, le lieu du point I quand A décrit la demi-droite $[OS)$. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?
3) Même question avec le point B.
4) (a) Donner les mesures de l'équerre, puis celle de $\widehat{AOB}$ (A distinct de O). En déduire que le lieu de B est inclus dans une courbe simple dont on précisera la nature.
   (b) Démontrer que $OB = 6\sin\widehat{OAB}$. En déduire le lieu de B.



Sujet 7 : Dans le plan, ABC est un triangle quelconque. On note K le centre de son cercle circonscrit et H son orthocentre. On s'intéresse au lieu $\mathscr{L}$ des points H quand C se déplace sur une droite parallèle à la droite (AB).

1) (a) Faire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique, faisant apparaître les points A et B, le point C sur une droite parallèle à la droite (AB), le triangle ABC, le point H et le point K. Afficher la trace du point H quand C varie sur la parallèle à (AB) et faire une conjecture concernant la nature du lieu des points H.
   (b) Vérifier à l'aide du logiciel l'égalité $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}$ $(*)$ (la vérification de cette relation par le calcul n'est pas demandée).
2) À partir de cette question, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; les points A et B sont donnés par leurs coordonnées : $A(-1;1)$ et $B(1;1)$. Le point C est sur l'axe des abscisses et a pour abscisse un réel x.
   (a) Réorganiser la figure et demander à nouveau le lieu $\mathscr{L}$ des points H.
   (b) Quelle en serait l'équation ? Vérifier en traçant ce lieu grâce à son équation.
3) En admettant que K a pour coordonnées $\left(0; \frac{2-x^2}{2}\right)$ et l'égalité $(*)$, en déduire les coordonnées de H puis l'équation de $\mathscr{L}$.

Sujet 8 : Soit k un réel. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) : $\ln x = kx^2$ pour x strictement positif.

1) En utilisant un logiciel de construction graphique ou une calculatrice graphique :
   (a) conjecturer, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation (E).
   (b) Si $k > 0$, trouver graphiquement une valeur approchée de k pour laquelle l'équation (E) admet une unique solution.
2) Démontrer que pour $k < 0$, l'équation (E) a une unique solution.

[1]Ces sujets ont été compilés par Mme Lada, qui m'a gentiment permis d'exploiter son travail.