Bac blanc

Session 2008

Épreuve : Mathématiques

Série : Scientifique

enseignement obligatoire (coefficient : 7)

L'usage des calculatrices est autorisé, les documents sont interdits.

Durée de l'épreuve : 4 heures.

Le sujet comporte 5 pages.

Les quatre exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans n'importe quel ordre, à condition que la présentation soit claire pour le correcteur. Tout résultat donné dans l'énoncé peut être utilisé même s'il n'a pas été démontré pour poursuivre l'exercice. Le soin apporté à la rédaction et à la présentation sera pris en compte dans la note finale.

Exercice 1 (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on appelle $\mathscr{D}$ la droite d'équation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, et $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $x + 2y - 3z - 1 = 0$.

1) *Dans chacune des lignes du tableau ci-dessous, une seule affirmation est exacte. le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte* 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

Question	Affirmation A	Affirmation B	Affirmation C
1	Le point M de coordonnées $(-1; 3; 2)$ appartient à $\mathscr{D}$	Le point N de coordonnées $(2; -1; -1)$ appartient à $\mathscr{D}$	Le point R de coordonnées $(3; 1; -4)$ appartient à $\mathscr{D}$
2	Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1; 2; -3)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$	Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(-2; 1; 1)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$	Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(3; 1; -4)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$
3	$\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$	$\mathscr{D}$ est strictement parallèle à $\mathscr{P}$	$\mathscr{D}$ est sécante à $\mathscr{P}$
4	Le point G de coordonnées $(1; 3; -2)$ appartient à $\mathscr{P}$	Le point G de coordonnées $(1; 3; 2)$ appartient à $\mathscr{P}$	Le point G de coordonnées $(1; 3; -1)$ appartient à $\mathscr{P}$
5	Le plan $\mathscr{Q}_1$ d'équation $x + 2y - 3z + 1 = 0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$	Le plan $\mathscr{Q}_2$ d'équation $4x - 5y - 2z + 3 = 0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$	Le plan $\mathscr{Q}_3$ d'équation $-3x + 2y - z - 1 = 0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$

2) On considère la droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par $A\left(1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

   (a) Écrire une représentation paramétrique de Δ.

   (b) Étudier l'intersection de $\mathscr{D}$ et Δ.

Exercice 2 (5 points)

Dans cet exercice, toutes les probabilités demandées devront être données sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1) On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne, et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

   (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

   (b) Calculer $P(X = 0)$.

   (c) On se propose de déterminer maintenant $P(X = 1)$.

   - Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\dfrac{8}{45}$.
   - En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer $P(X = 1)$.

2) On reprend l'urne dans sa composition initiale : 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

   On effectue maintenant n tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.

   Soit k un entier compris entre 1 et n.

   Soit N_k l'événement : « la k-ième boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches ». On cherche dans cette question à calculer la probabilité de l'événement N.

   Soit A_k l'événement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $k-1$ premiers tirages et une boule noire au k-ième ».

   Soit B_k l'événement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $(n-k)$ derniers tirages ».

   Calculer $P(A_k)$, $P_{A_k}(B_k)$ et en déduire que $P(N_k) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-k}$.

3) Toujours dans l'hypothèse où l'on effectue n tirages comme dans la question précédente, on s'intéresse à la probabilité de l'événement "$X = 1$", c'est-à-dire la probabilité de tirer exactement une boule noire lors du tirage de n boules selon la règle déjà exposée.

   (a) En constatant que l'événement $X = 1$ est la réunion disjointe des événements $N_1, N_2, \ldots, N_n$, calculer sa probabilité $P(X = 1)$ (on remarquera que $P(N_k)$ peut s'écrire $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k}$).

   (b) Que peut-on dire de la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini ? Pouvait-on s'y attendre ?

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

L'objet de cet exercice est l'étude de quelques propriétés de f et de sa courbe représentative.

1) **Une fonction auxiliaire**

   Soit φ l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1$.

   (a) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x \neq 0$.

   (b) Calculer les limites de φ en $+\infty$ et $-\infty$.

   (c) Calculer les limites de φ en 0 à gauche et à droite.

   (d) Dresser le tableau de variations de φ.

   (e) En déduire le tableau de signe de φ sur $\mathbb{R}^*$.

2) **Variations de f**

   (a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.
   f est-elle dérivable en 0 ?

   (b) Montrer que f est continue en 0.

   (c) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

   (d) Montrer que pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\left(e^{1/x}+1\right)^2}$.
   En déduire que f' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de détailler les limites de f en $\pm\infty$).

3) **Courbe représentative**

   Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, l'unité de longueur étant 6cm.

Exercice 4 (5 points)

On considère le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orhonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Dans tout l'exercice, $\mathscr{P} \setminus \{O\}$ désigne le plan $\mathscr{P}$ privé du point origine O.

1) **Question de cours**

   On prend comme pré-requis les résultats suivants :

   - si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif ;
   - pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul d'affixe z, on a : $\arg(z) = (\vec{u}; \vec{w})$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

   (a) Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que :

   $$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \text{ à } 2k\pi \text{ près, avec } k \text{ entier relatif.}$$

   (b) Démontrer que si A, B et C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c, on a :

   $$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \text{ à } 2k\pi \text{ près, avec } k \text{ entier relatif.}$$

2) On considère l'application f de $\mathscr{P} \setminus \{O\}$ dans $\mathscr{P} \setminus \{O\}$ qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$ (remarquer la présence de la barre au dessus de z). On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i.

   (a) Démontrer que pour $z \neq 0$, on a :

   $$\arg(z') = \arg(z) \text{ à } 2k\pi \text{ près, avec } k \text{ entier relatif.}$$

   En déduire que, pour tout point M de $\mathscr{P} \setminus \{O\}$, les points M et $M' = f(M)$ appartiennent à la même demi-droite d'origine O.

   (b) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P} \setminus \{O\}$ tels que $f(M) = M$.

   (c) M est un point du plan $\mathscr{P}$ distinct de O, U et V, on admet que M' est aussi distinct de O, U et V. Établir l'égalité :

   $$\frac{z'-1}{z'-i} = (-i) \times \overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}$$

   En déduire une relation entre $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-i}\right)$ et $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)$.

3) (a) Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq i$ et soit M le point d'affixe z. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\dfrac{z-1}{z-i}$ est réel non nul.

   (b) Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V.