Bac blanc

Session 2008

Épreuve : Mathématiques

Série : Scientifique

enseignement de spécialité (coefficient : 9)

L'usage des calculatrices est autorisé, les documents sont interdits.

Durée de l'épreuve : 4 heures.

Le sujet comporte 5 pages.

Les quatre exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans n'importe quel ordre, à condition que la présentation soit claire pour le correcteur. Tout résultat donné dans l'énoncé peut être utilisé même s'il n'a pas été démontré pour poursuivre l'exercice. Le soin apporté à la rédaction et à la présentation sera pris en compte dans la note finale.

Exercice 1 (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on appelle $\mathscr{D}$ la droite d'équation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, et $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $x + 2y - 3z - 1 = 0$.

1) *Dans chacune des lignes du tableau ci-dessous, une seule affirmation est exacte. le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte* 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

Question	Affirmation A	Affirmation B	Affirmation C
1	Le point M de coordonnées $(-1; 3; 2)$ appartient à $\mathscr{D}$	Le point N de coordonnées $(2; -1; -1)$ appartient à $\mathscr{D}$	Le point R de coordonnées $(3; 1; -4)$ appartient à $\mathscr{D}$
2	Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1; 2; -3)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$	Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(-2; 1; 1)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$	Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(3; 1; -4)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$
3	$\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$	$\mathscr{D}$ est strictement parallèle à $\mathscr{P}$	$\mathscr{D}$ est sécante à $\mathscr{P}$
4	Le point G de coordonnées $(1; 3; -2)$ appartient à $\mathscr{P}$	Le point G de coordonnées $(1; 3; 2)$ appartient à $\mathscr{P}$	Le point G de coordonnées $(1; 3; -1)$ appartient à $\mathscr{P}$
5	Le plan $\mathscr{Q}_1$ d'équation $x + 2y - 3z + 1 = 0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$	Le plan $\mathscr{Q}_2$ d'équation $4x - 5y - 2z + 3 = 0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$	Le plan $\mathscr{Q}_3$ d'équation $-3x + 2y - z - 1 = 0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$

2) On considère la droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par $A\left(1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

   (a) Écrire une représentation paramétrique de Δ.

   (b) Étudier l'intersection de $\mathscr{D}$ et Δ.

Exercice 2 (5 points)

Dans cet exercice, toutes les probabilités demandées devront être données sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1) On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne, et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

   (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

   (b) Calculer $P(X = 0)$.

   (c) On se propose de déterminer maintenant $P(X = 1)$.

   - Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\dfrac{8}{45}$.
   - En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer $P(X = 1)$.

2) On reprend l'urne dans sa composition initiale : 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

   On effectue maintenant n tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.

   Soit k un entier compris entre 1 et n.

   Soit N_k l'événement : « la k-ième boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches ». On cherche dans cette question à calculer la probabilité de l'événement N.

   Soit A_k l'événement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $k - 1$ premiers tirages et une boule noire au k-ième ».

   Soit B_k l'événement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $(n - k)$ derniers tirages ».

   Calculer $P(A_k)$, $P_{A_k}(B_k)$ et en déduire que $P(N_k) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-k}$.

3) Toujours dans l'hypothèse où l'on effectue n tirages comme dans la question précédente, on s'intéresse à la probabilité de l'événement "$X = 1$", c'est-à-dire la probabilité de tirer exactement une boule noire lors du tirage de n boules selon la règle déjà exposée.

   (a) En constatant que l'événement $X = 1$ est la réunion disjointe des événements $N_1, N_2, \ldots, N_n$, calculer sa probabilité $P(X = 1)$ (on remarquera que $P(N_k)$ peut s'écrire $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n \left(\dfrac{5}{6}\right)^k$).

   (b) Que peut-on dire de la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini ? Pouvait-on s'y attendre ?

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

L'objet de cet exercice est l'étude de quelques propriétés de f et de sa courbe représentative.

1) **Une fonction auxiliaire**

   Soit φ l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} + 1$.

   (a) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x \neq 0$.

   (b) Calculer les limites de φ en $+\infty$ et $-\infty$.

   (c) Calculer les limites de φ en 0 à gauche et à droite.

   (d) Dresser le tableau de variations de φ.

   (e) En déduire le tableau de signe de φ sur $\mathbb{R}^*$.

2) **Variations de f**

   (a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

   f est-elle dérivable en 0 ?

   (b) Montrer que f est continue en 0.

   (c) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

   (d) Montrer que pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\left(e^{1/x} + 1\right)^2}$.

   En déduire que f' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de détailler les limites de f en $\pm\infty$).

3) **Courbe représentative**

   Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, l'unité de longueur étant 6cm.

Exercice 4 (5 points)

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $u_n = \frac{1}{3}(10^n - 7)$.

1) Démontrer que u_n est un entier naturel.

2) (a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. Expliquer comment démontrer que u_4 est un nombre premier.

   (b) Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $S_n = 3+3\times10+3\times10^2+\cdots+3\times10^{n-1}$.
   Démontrer que $u_n = S_n - 2$, et en déduire pour $n \geqslant 2$ l'écriture décimale de u_n.

3) (a) Vérifier que u_9 est multiple de 17.

   (b) Justifier, **sans calcul**, que $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$.

   (c) Démontrer que, pour tout entier naturel k, u_{16k+9} est multiple de 17.

4) Recherche du pgcd de u_n et u_{n+1} (noté d_n).

   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} = 10u_n + 21$.

   (b) Démontrer que d_n divise 21.

   (c) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, $u_n \equiv 1 \pmod{3}$.

   (d) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, u_n et 7 sont premier entre eux.

   (e) Déterminer d_n.