Corrigé du bac blanc TS 2008

Exercice 1 (4 points)

1) (a) Pour répondre à la première question, il faut chercher si il existe une valeur du paramètre t telle que $(1+2t; 2-t; -3-t)$ soient les coordonnées du point donné.

On vérifie facilement que pour $t = 1$, on obtient les coordonnées du point R (réponse C).

(b) Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est donné par la représentation paramétrique : en notant Ω le point de coordonnées $(1; 2; -3)$, et $\overrightarrow{v'}$ le vecteur de coordonnées $(2; -1; -1)$, la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ dit que $M(x; y; z)$ appartient à $\mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{\Omega M} = t\overrightarrow{v'}$.

Ainsi $\overrightarrow{v'}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, et comme $\vec{v} = -\overrightarrow{v'}$, $\vec{v}$ est bien aussi un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ (réponse B).

(c) La réponse à cette question dépend du nombre de solutions de l'équation obtenue en remplaçant x, y et z dans l'équation de $\mathscr{P}$ par les coordonnées du point M de $\mathscr{D}$ de paramètre t. Cette équation s'écrit :

$$(1+2t) + 2(2-t) - 3(-3-t) - 1 = 0 \iff 3t - 5 = 0 \iff t = \frac{5}{3}$$

L'équation a une unique solution, ce qui signifie qu'il existe un unique point commun à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$. $\mathscr{D}$ est donc *sécante* à $\mathscr{P}$ (réponse C).

(d) Il suffit de mettre les coordonnées de chaque point G dans l'équation de $\mathscr{P}$: on vérifie que les bonnes coordonnées sont $(1; 3; 2)$ (réponse B).

(e) $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont perpendiculaires si et seulement si tout vecteur normal à $\mathscr{P}$ est orthogonal à tout vecteur normal à $\mathscr{Q}$.

Un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\,(1; 2; -3)$. Des vecteurs normaux à $\mathscr{Q}_1$, $\mathscr{Q}_2$ et $\mathscr{Q}_3$ sont respectivement $\overrightarrow{n_1}\,(1; 2; -3)$, $\overrightarrow{n_2}\,(4; -5; -2)$ et $\overrightarrow{n_3}\,(-3; 2; -1)$, et on vérifie que seul $\overrightarrow{n_2}$ est orthogonal à $\vec{n}$.

Ainsi $\mathscr{Q}_2$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$ (réponse A).

2) (a) Un vecteur directeur de Δ est aussi vecteur normal à $\mathscr{P}$. On peut prendre par exemple comme précédemment $\vec{n}\,(1; 2; -3)$. Une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ est donc :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1/2 + 2t \\ z = -1/2 - 3t \end{cases}$$

(b) Un point $M(x; y; z)$ appartient à l'intersection de $\mathscr{D}$ et Δ s'il existe deux réels t et t' tels que

$$\begin{cases} x = 1 + 2t = 1 + t' \\ y = 2 - t = -1/2 + 2t' \\ z = -3 - t = -1/2 - 3t' \end{cases}$$

On obtient un système de trois équations en les deux inconnues t et t'. Trois cas peuvent se produire :

- le système n'est pas *compatible*, i.e. n'admet pas de solution, auquel cas les deux droites ne se rencontrent pas ;
- le système a une unique solution, auquel cas les deux droites sont sécantes ;
- le système a une infinité de solutions, auquel cas les deux droites sont confondues.

Les vecteurs directeurs des deux droites sont $\overrightarrow{v'}\,(2; -1; -1)$ et $\vec{n}\,(1; 2; -3)$, il est facile de constater qu'ils ne sont pas colinéaires, ce qui élimine les cas des droites parallèles distinctes ou confondues.

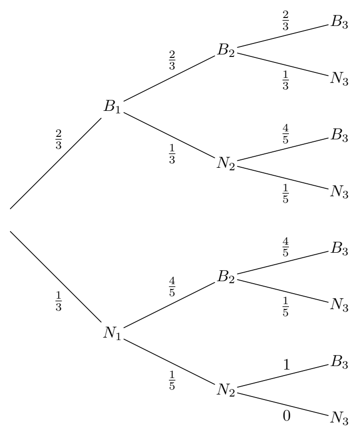
$$\begin{cases} 1 + 2t = 1 + t' \\ 2 - t = -1/2 + 2t' \\ -3 - t = -1/2 - 3t' \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = t' \\ 2 - t = -1/2 + 4t \\ -3 - t = -1/2 - 6t \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = t' \\ 5/2 = 5t \\ -5/2 = -5t \end{cases}$$

On remarque que les deux dernières équations donnent la même solution $t = 1/2$. Le point M, de paramètre $1/2$ sur la droite $\mathscr{D}$ (et de paramètre 1 sur la droite Δ) et de coordonnées $(2; 3/2; -7/2)$ est donc l'unique point d'intersection des deux droites.

Ainsi les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont sécantes.

Exercice 2 (5 points)

1) Dans cette première partie, on s'appuiera sur l'arbre pondéré suivant :



   (a) X peut prendre comme valeurs 0, 1 ou 2 (il n'y a que deux boules noires dans l'urne, et on ne les remet pas).

   (b) L'événement "$X = 0$" correspond à l'événement $B_1 \cap B_2 \cap B_3$. Le produit des probabilités portées sur les branches de ce chemin est : $P(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

   (c) On se propose de déterminer maintenant $P(X=1)$.

   - L'événement $B_1 \cap N_2 \cap B_3$ a pour probabilité $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{45}$.
   - L'événement "$X = 1$" est la réunion disjointe des événements $N_1 \cap B_2 \cap B_3$, $B_1 \cap N_2 \cap B_3$ et $B_1 \cap B_2 \cap N_3$. Sa probabilité est donc[1] :

$$P(X=1) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{364}{675}$$

2) Il est clair que $N_k = A_k \cap B_k$. Or, A_k est l'événement consistant à tirer $k-1$ tirages d'une boule blanche avec remise dans une urne contenant 4 boules blanches et 2 boules noires, suivi d'un tirage d'une boule noire. Sa probabilité est donc :

$$P(A_k) = \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

L'événement "B_k sachant A_k" consiste à tirer $n-k$ boules blanches avec remise dans une urne contenant 4 boules blanches et une seule boule noire. Sa probabilité est donc :

$$P_{A_k}(B_k) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$$

La probabilité de N_k est donc :

$$P(N_k) = P(A_k)\, P_{A_k}(B_k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$$

3) "$X = 1$" est la réunion disjointe des événements $N_1, N_2, \ldots, N_n$. Or la probabilité de N_k peut s'écrire :

$$P(N_k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{-k} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\frac{3}{2}\left(\frac{4}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{4}\right)^{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k}$$

---

[1] Pour vérifier, calculons la probabilité de l'événement "$X = 2$". Il est réunion disjointe de $N_1 \cap N_2 \cap B_3$, $N_1 \cap B_2 \cap N_3$ et $B_1 \cap N_2 \cap N_3$, sa probabilité est

$$P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{37}{225}$$

et on vérifie bien que $\frac{8}{27} + \frac{364}{675} + \frac{37}{225} = 1$.

La probabilité de "$X=1$" est donc :

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(N_1)+P(N_2)+\cdots+P(N_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^k = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^k \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n \frac{5}{6}\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}} = \frac{5}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, cette probabilité tend vers 0 (c'est une somme de deux suites géométriques de raisons strictement inférieures à 1), ce qui se conçoit aisément : lorsqu'on augmente arbitrairement les tirages, la chance de tirer les deux boules noires se rapproche intuitivement de 1.

Exercice 3 (6 points)

1) **Une fonction auxiliaire**

(a) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition $x \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. φ est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\varphi'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}+\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(2+\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}}\frac{2x+1}{x^3}$$

(b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = 1$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 2$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, et on sait que $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^-} \varphi(x) = 1$.
D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, ce qui permet facilement de trouver $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = +\infty$.

(d) La factorisation précédente donne facilement le signe de φ' sur $\mathbb{R}^*$, et permet de dresser son tableau de variations :

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	||	$+$	
x^3		$-$		$-$	||	$+$	
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	
$\varphi(x)$	2	$\searrow$	$1-e^{-2}$	$\nearrow$	1 || $+\infty$	$\searrow$	2

(e) $1-e^{-2} \approx 0{,}86 > 0$, donc le tableau de variations de φ nous apprend qu'elle garde un signe positif strict sur $\mathbb{R}^{*-}$, de même que sur $\mathbb{R}^{*+}$.

2) **Variations de f**

(a) $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$, quantité admettant (au vu de l'étude faite plus haut pour les limites de φ) pour limite 1 en 0 à gauche, et 0 en 0 à droite.
$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ n'admet donc pas de limite en 0, et f n'est pas dérivable en 0. Par contre, on peut facilement déduire des calculs que la courbe représentative de f admet deux demi-tangentes en 0, l'une de pente 0 à droite, et une de pente 1 à gauche.

(b) f n'est pas dérivable en 0, mais elle y est continue, puisque $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

(c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = 1$. Les théorèmes généraux permettent alors de conclure[2] que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

[2] En fait, on peut même démontrer, en effectuant un changement de variable $t = \frac{1}{x}$, que la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe représentative de f en $\pm\infty$. Mais le calcul n'est pas tout à fait trivial.

(d) f n'est donc pas dérivable en 0, par contre, il est facile de constater qu'elle l'est sur $\mathbb{R}^*$, et, pour tout $x \neq 0$,

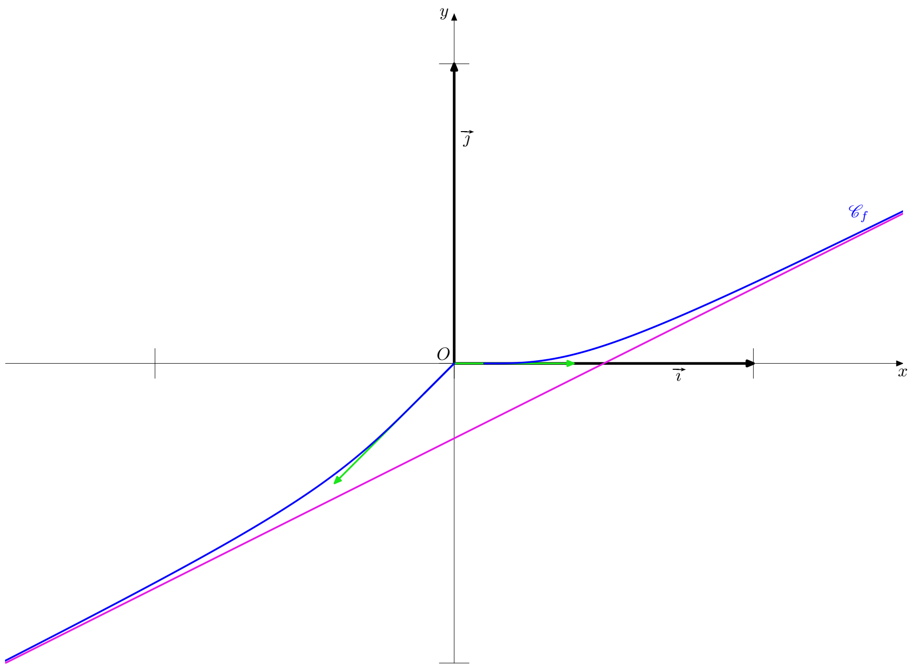
$$f'(x) = \frac{1\left(e^{1/x}+1\right) - x\left(-e^{1/x}/x^2\right)}{\left(e^{1/x}+1\right)^2} = \frac{(1+1/x)\,e^{1/x}+1}{\left(e^{1/x}+1\right)^2} = \frac{\varphi(x)}{\left(e^{1/x}+1\right)^2}$$

f' est donc strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*-}$ et $\mathbb{R}^{*+}$ (et donc sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est continue en 0).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) **Courbe représentative**

Voici pour finir cette étude la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 6cm :



Exercice 4 (enseignement obligatoire, 5 points)

1) **Question de cours**

(a) On a $\dfrac{z}{z'} \times z' = z$, donc $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) + \arg(z') = \arg(z) \pmod{2\pi}$, d'où $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}$.

(b) On rappelle que $b-a$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On a, d'après les pré-requis et ce qu'on vient de démontrer :

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AC}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \pmod{2\pi}$$

d'après la relation de Chasles sur les angles orientés.

2) (a) Soit $z \neq 0$. $\arg(z') = \arg\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right) = -\arg(\overline{z}) = \arg(z) \pmod{2\pi}$ en vertu du fait que $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$.

$\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ font donc des angles égaux modulo 2π avec le premier vecteur de base, donc M et son image M' sont donc tous deux sur une même demi-droite d'origine O.

(b) $f(M) = M$ équivaut à $\dfrac{1}{\overline{z}} = z \iff 1 = z\overline{z} = \|z\|^2 \iff OM^2 = 1 \iff OM = 1$. Les points M invariants par f sont donc les points du cercle de centre O et de rayon 1.

(c) Soit M un point du plan $\mathscr{P}$ distinct de O, U et V. Dire que M' est égal à O revient à dire que $\dfrac{1}{\overline{z}} = 0$, ce qui n'est pas possible. Dire que $M' = U$ revient à dire que $\dfrac{1}{\overline{z}} = 1$, soit $z = 1$, ce qui est exclu. De même, on voit que $M' = V$ équivaut à $M = V$, ce qui est aussi exclu. Ainsi M' est bien aussi distinct de O, U et V. On a alors :

$$\frac{z'-1}{z'-i} = \frac{\frac{1}{\overline{z}}-1}{\frac{1}{\overline{z}}-i} = \frac{1-\overline{z}}{1-i\overline{z}} = \frac{1}{i}\left(\frac{1-\overline{z}}{-i-\overline{z}}\right) = \frac{1}{i}\left(\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i}\right) = (-i) \times \overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}$$

On en déduit que $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-i}\right) = -\arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right) - \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

3) (a) Dire que M est sur la droite (UV) privée de U et de V revient à dire que M, U et V sont alignés, donc que $\left(\overrightarrow{VM}, \overrightarrow{UM}\right) = 0 \pmod{\pi}$, soit encore que $\dfrac{z-1}{z-i}$ est réel non nul.

(b) D'après ce qui précède, cela équivaut encore à $\dfrac{z'-1}{z'-i}$ imaginaire pur. Ainsi, l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V est inclus dans l'ensemble des points M' distincts de U et V tels que $\overrightarrow{UM'}$ et $\overrightarrow{VM'}$ soient orthogonaux. Il s'agit bien entendu du cercle[3] de diamètre $[UV]$, privé des points U et V.

Réciproquement, si M' est un point de cet ensemble, alors $\dfrac{z'-1}{z'-i}$ est imaginaire pur (et en particulier non nul puisque $M' \neq U$). Donc $i\dfrac{z'-1}{z'-i}$ est réel, de même que son conjugué, que nous noterons α.

L'équation caractérisant le fait que le point M d'affixe z a pour image le point M' par f est :

$$\frac{z-1}{z-i} = \alpha \iff z-1 = \alpha\,(z-i) \iff (1-\alpha)\,z = 1 - i\alpha$$

Elle a une solution si et seulement si $1 - \alpha \neq 0$, soit si $\alpha \neq 1$. Or

$$\alpha = 1 \iff \frac{z'-1}{z'-i} = -i \iff z'-1 = -i\,(z'-i) \iff z'\,(1+i) = 0 \iff z' = 0$$

ce qui est exclus.

Donc le point M d'affixe $z = \dfrac{1-i\alpha}{1-\alpha}$ a pour image M' par f. Reste à vérifier que $z \neq 1$ (ce qui entraînerait $\alpha = i\alpha$, donc $\alpha = 0$, ce qui est exclus) et $z \neq i$ (ce qui entraînerait $1 = i$, exclus aussi).

En conclusion, l'image de la droite (UV) privée des points U et V est le cercle de diamètre $[UV]$, privé des mêmes points U et V.

Exercice 4 (enseignement de spécialité, 5 points)

1) $10 \equiv 1 \pmod 3$, donc $10^n \equiv 1^n = 1 \pmod 3$. De plus $7 \equiv 1 \pmod 3$, donc $10^n - 7 \equiv 0 \pmod 3$. Ainsi $10^n - 7$ est divisible par 3, ce qui montre que u_n est un entier naturel.

2) (a) $u_1 = 1$, $u_2 = 31$, $u_3 = 331$, $u_4 = 3331$.

Pour démontrer que u_4 est premier, il suffit d'essayer les divisions de 3331 par les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{3331}$. Il se trouve qu'aucune division ne tombe juste, donc u_4 est premier.

(b) Constatons que

$$10u_n = 10\frac{10^n-7}{3} = \frac{10^{n+1}-70}{3} = \frac{10^{n+1}-7}{3} - \frac{63}{3} = u_{n+1} - 21$$

(u_n) vérifie donc la relation de récurrence $u_{n+1} = 10u_n + 21$. Or :

$$\begin{aligned}
10\,(S_n-2)+21 &= 10\left(3 + 3\times 10 + 3\times 10^2 + \cdots + 3\times 10^{n-1} - 2\right) + 9 \\
&= \left(3\times 10 + 3\times 10^2 + \cdots + 3\times 10^n\right) + 1 \\
&= \left(3 + 3\times 10 + 3\times 10^2 + \cdots + 3\times 10^n - 2\right) \\
&= S_{n+1} - 2
\end{aligned}$$

Donc $(S_n - 2)$ vérifie la même relation de récurrence que (u_n). De plus, $S_1 - 2 = 3 - 2 = 1 = u_1$, donc par récurrence, $u_n = S_n - 2$ pour tout $n \geqslant 1$.

Or $S_n = 333\ldots3$, les 3 étant au nombre de n. Donc u_n s'écrit avec $(n-1)$ chiffres 3 suivis d'un 1.

[3] Remarque : f est une *inversion*, une transformation du plan (privé de son origine) un peu plus compliquée que les transformations étudiées en terminale S, qui possède la curieuse propriété de transformer certaines droites en cercles, et vice-versa. Ceci permet de transformer des démonstrations compliquées parce que faisant intervenir des cercles en trivialités, voir par exemple sur wikipedia l'article consacré aux *cercles d'Apollonius*.

3) (a) $u_9 = 333333331 = 17 \times 19607843$.

   (b) D'après le petit théorème de Fermat, 10 étant premier avec 17 vérifie $10^{17-1} \equiv 1 \pmod{17}$.

   (c) On a :

$$\frac{10^{16(k+1)+9}-7}{3} = 10^{16}\frac{10^{16+9}-7}{3} + \frac{7}{3}\left(10^{16}-1\right)$$

soit $u_{16(k+1)+9} = 10^{16}u_{16k+9} + \dfrac{7}{3}\left(10^{16}-1\right)$. Or on a vu que $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$, donc $10^{16}-1$, divisible par 3, est aussi divisible par 17. Or 3 et 17 sont premiers entre eux, donc $10^{16}-1$ est divisible par leur produit. Ainsi, la relation précédente s'écrit, modulo 17 :

$$u_{16(k+1)+9} \equiv u_{16k+9} \pmod{17}$$

Comme $u_9 \equiv 0 \pmod{17}$, cette relation permet de démontrer par récurrence que $u_{16k+9} \equiv 0 \pmod{17}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4) Recherche du pgcd de u_n et u_{n+1} (noté d_n).

   (a) La relation de récurrence $u_{n+1} = 10u_n + 21$ a déjà été trouvée ci-dessus.

   (b) d_n divise u_n et u_{n+1}, donc aussi $10u_n$, et la différence $u_{n+1} - 10u_n$, qui est égale à 21 d'après ce qui précède. Donc d_n divise 21.

   (c) $10^n \equiv 1 \pmod 9$, donc $10^n - 7 \equiv -6 \equiv 3 \pmod 9$, d'où $u_n \equiv 1 \pmod 3$.

   (d) 7 étant premier, u_n et 7 ne sont pas premiers entre eux si et seulement si 7 divise u_n. Or, si 7 divisait u_n pour un certain n non nul, il diviserait aussi $10u_{n-1} = u_n - 21$. Étant premier avec 10, il devrait diviser u_{n-1}, et donc, par récurrence, u_k pour tout $k \leqslant n$. Or u_1 est premier avec 7.
   Donc 7 ne peut diviser u_n pour aucune valeur de n.

   (e) D'après la premier question, d_n est égal à 1, 3, 7 ou 21.
   D'après la deuxième question, d_n ne peut être divisible par 3, puisque u_n (et u_{n+1}) ne l'est pas.
   D'après la troisième question, d_n ne peut être divisible par 7 puisque u_{n+1} ne l'est pas.
   Ne reste que la solution $d_n = 1$: u_n et u_{n+1} sont **premiers entre eux** pour tout n.