Des relations sur les coefficients binomiaux

Tout le monde connaît les relations suivantes :

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$
$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots\pm\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$$

On les démontre très facilement avec la *formule du binôme*. Leurs démonstrations par des méthodes de dénombrement, si elles sont dans ce cas particulier moins faciles, sont loin d'être inintéressantes. C'est l'objet de ce document.

1 Somme des $\binom{n}{k}$

1.1 Démonstration par la formule du binôme

Il suffit d'écrire :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k$$

ce qui permet de reconnaître la formule $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, dans le cas particulier $a=b=1$. On en déduit immédiatement :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n$$

1.2 Démonstration combinatoire

Par définition, $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. Ceci permet d'identifier $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ comme étant la somme des nombres de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments, pour toutes les valeurs de k possibles.

Ainsi, la somme cherchée est le nombre de parties d'un ensemble à n éléments.

Il s'agit donc de calculer ce nombre de parties d'une autre manière. Pour cela, considérons l'ensemble $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$. À toute partie A de E, associons le n-uplet $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de la façon suivante : pour tout i compris entre 1 et n, x_i vaut 1 si $e_i\in A$, et 0 sinon.

Il est clair qu'à chaque partie de E est associé un unique n-uplet d'éléments de l'ensemble à 2 éléments $\{0;1\}$, et que tout n-uplet est l'image d'une et d'une seule partie de E.

Il y a donc autant de parties de E que de n-listes d'éléments de $\{0;1\}$. Or on sait compter ces n-listes : il y en a 2^n, et c'est donc aussi le nombre de parties de E.

On obtient donc bien l'identité cherchée[1]

[1] Cette méthode consistant à calculer de deux façons différentes une même quantité est extrêmement fructueuse en mathématiques.

2 Somme alternée des $\binom{n}{k}$

Il s'agit maintenant de calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$, qu'on appelle *somme alternée* des coefficients du binôme, en raison du fait que les signes devant les coefficients alternent.

2.1 Démonstration par la formule du binôme

Dans cette première méthode, on va réécrire la relation de manière à faire apparaître la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k = (1-1)^n = 0^n = 0$$

Donc la somme cherchée est nulle.

2.2 Démonstration combinatoire

Cette démonstration est bien moins évidente. Constatons d'abord que ce qui a été trouvé peut s'interpréter de la manière suivante :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{k\text{ pair}}\binom{n}{k} - \sum_{k\text{ impair}}\binom{n}{k}$$

Ainsi, dire que cette somme est nulle revient dire que dans un ensemble E à n éléments, le nombre de partie *possédant un nombre pair d'éléments* est égal au nombre de parties *possédant un nombre impair d'éléments.*

La question qui se pose alors est : y a-t-il un moyen simple de prouver ceci ?

Dans le cas où E est de cardinal impair, c'est évident : l'application $\complement_E$ qui à toute partie A de E associe son complémentaire $\complement_E A$ associe chaque partie de cardinal pair à une partie de cardinal impair, et lycée de Versailles. Il y a donc autant d'éléments dans l'ensemble des parties de cardinal pair que dans l'ensemble des parties de cardinal impair[2].

Si $\operatorname{card} E$ est pair, tout devient plus compliqué : l'application complémentaire conserve la parité du cardinal, et ne sert plus à rien.

Pour lever la difficulté, isolons un élément particulier a de E, et distinguons les parties selon deux critères : le fait de contenir a ou pas, et le fait d'avoir un cardinal pair ou impair.

	cardinal pair	cardinal impair
contient a	n_1	n_2
ne contient pas a	n_3	n_4

n_1, n_2, n_3 et n_4 étant les nombres de parties de chaque type.

Se donner une partie A de E contenant a est équivalent à se donner une partie A' ne contenant pas a, par l'application consistant à rajouter ou enlever a Remarquons au passage que ceci implique qu'il y a autant de parties de E contenant a que de parties ne contenant pas A.

Si A, contenant a, est de cardinal pair, $A\setminus\{a\}$ est de cardinal impair, donc le nombre n_1 de parties de E de cardinal pair contenant a est égal au nombre n_4 de parties de E ne contenant pas a de cardinal impair.

De la même façon, on démontre que $n_2 = n_3$. Ainsi, le nombre de parties de E de cardinal pair, égal à $n_1 + n_3$, est égal d'après ce que l'on vient de dire à $n_2 + n_4$, qui est le nombre de parties de E de cardinal impair.

[2]D'ailleurs, dans ce cas, on aurait pu plus simplement utiliser la relation de symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, qui permet dans la somme de regrouper les termes deux par deux, avec des signes opposés. Donc, dans le cas où n est impair, l'identité est *vraiment* triviale !