Introduction aux complexes

Dans toute cette feuille, le plan est repéré par un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) **Une nouvelle opération**

   À tout vecteur $\vec{u}$ du plan, on associe le *couple* $(x; y)$ de ses coordonnées. On sait que l'opération d'addition des vecteurs se traduit sur les coordonnées de la manière suivante : si $\vec{u}\,(x; y)$ et $\vec{v}\,(x'; y')$, alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$.

   Oublions un peu les vecteurs. Définissons une nouvelle opération sur les couples, de la manière suivante :

   $$(x; y) \times (x'; y') = (xx' - yy'; xy' + x'y)$$

   (a) Calculer $(5; 3) \times (4; -1)$ et $(1; 2) \times (1; 2)$.

   (b) Montrer que si $(x; y) \times (x'; y') = (0; 0)$, alors l'un ou l'autre des deux couples est le couple $(0; 0)$.

   (c) *(Facultatif)* Résoudre l'équation $(x; y) \times (x'; y') = (x"; y")$, d'inconnues x' et y'. Que constate-t-on ?

   (d) Pour simplifier les notations, on note $(x; 0) = x$, et $(0, 1) = i$, et plus généralement $(x; y) = x + iy$. Sous cette forme algébrique, on vient de définir l'ensemble $\mathbb{C}$ des *nombres complexes*, et les deux opérations sur cet ensemble.

   Dans la suite, on oubliera le symbole $\times$ dans les multiplications, et on utilisera systématiquement sans démonstration la distributivité (mais vous avez le droit de redémontrer ces propriétés !).

   i. Calculer $(2 + 3i)(5 - i)$.

   ii. Calculer i^2, i^3 et i^4. Amusant, non ?

   iii. Donner la règle permettant de calculer $(a + ib) \times (a' + ib')$.

   iv. θ et θ' sont deux réels quelconques. Calculer $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$. Peut-on simplifier le résultat ? Élégant, non ?

2) **Des nouvelles solutions pour les équations du second degré**

   (a) On considère l'équation $z^2 + 1 = 0$. En écrivant $-1 = i^2$, trouver les solutions complexes de cette équation.

   (b) Trouver les solutions complexes de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$, puis de l'équation $z^3 - 1 = 0$, en constatant que 1 est solution évidente. Placer les solutions dans le plan complexe.

   (c) Plus généralement, reprendre l'étude des équations du second degré avec vos nouveaux amis les nombres complexes, en donnant les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (avec a, b et c réels, $a \neq 0$) selon le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

   (d) Résoudre l'équation $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$, puis l'équation $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$.