

Feuille d'exercices : continuité

1) Étude d'une fonction définie de façon particulière

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1$$

(a) Montrer que f est continue en 0.

(b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

En déduire la dérivabilité de la fonction f en 0, et calculer $f'(0)$.

2) Nombre de solutions d'équations polynomiales

Discuter du nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :

(a) $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$

(b) $x^4 + x^3 - x + 1 = 0$ (il faudra peut-être étudier en détail la dérivée !).

3) Un exemple de fonction dérivable à dérivée non continue

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

Montrer que f est continue en 0, qu'elle est dérivable en 0 mais que sa dérivée f' n'est pas continue en 0.

4) Un petit théorème de point fixe

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0; 1]$, et à valeurs dans l'intervalle $[0; 1]$.

Démontrer que f admet (au moins) un *point fixe* dans $[0; 1]$, i.e. un réel $a \in [0; 1]$ tel que $f(a) = a$ (un tel réel sera utile lorsque nous étudierons les suites définie par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$).

5) Une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1; 1[$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$.

(a) Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

(b) Étudier la parité de f .

(c) Étudier la dérivabilité de f en 0.

(d) Démontrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1; 1[$.

Un exercice d'olympiades (aucun rapport avec le cours, il restait de la place sur la feuille !)

On dispose de 7 objets que l'on répartit en autant de tas que l'on veut, chaque tas contenant autant d'objets que l'on veut.

Une *manipulation* consiste à enlever un objet de chaque tas et à faire un nouveau tas des objets ainsi récupérés.

Exemple : une répartition possible sera notée $(4, 3)$. Elle signifie qu'on a deux tas, l'un de 4 objets, l'autre de 3 objets. Après une manipulation, on obtiendra donc la répartition $(3, 2, 2)$.

Avertissement : on considère que les répartitions $(4, 3)$ et $(3, 4)$ sont identiques. De même, les répartitions $(3, 2, 2)$, $(2, 3, 2)$ et $(2, 2, 3)$ sont identiques.

- 1) On place les 7 objets en un seul tas : la répartition est donc (7) . Quelle répartition obtiendra-t-on après 3 manipulations ? Après 7 manipulations ? Après 11 manipulations ? Après 2007 manipulations ?
- 2) Ici, on ne connaît pas la répartition initiale, mais après 2007 manipulations, on obtient la répartition $(4, 2, 1)$. Indiquer les répartitions initiales possibles.
- 3) Paul et Virginie jouent ensemble. Au départ, Paul dispose les objets sans montrer la répartition à Virginie. Puis il simule sur son ordinateur 2007 manipulations et ne montre à Virginie que la répartition finale. Il demande alors à Virginie de deviner la répartition initiale. Virginie réfléchit et avoue ne pas savoir répondre car elle hésite entre trois répartitions. Sachant que Virginie a raisonné correctement (et qui en douterait ?), quelle répartition finale a-t-elle sous les yeux ?