Corrigé du devoir libre n°3 : fonction exponentielle

Exercice 72 p.107

Dans cet exercice type Bac, f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = e^{1/x}$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A. **Étude de f sur** $]0; +\infty[$

1. Commençons par la limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, et $\lim\limits_{y \to 0} e^y = 1$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1/x} = 1$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{1/x} = +\infty$.

   En 0, c'est moins simple. Posons $X = \frac{1}{x}$. Lorsque x tend vers 0 à droite, X tend vers $+\infty$. On peut écrire : $f(x) = xe^{1/x} = \dfrac{e^X}{X}$, et le cours nous apprend que la limite de cette quantité en $+\infty$ est $+\infty$ (prépondérance de exp sur les fonctions puissances en $+\infty$). Ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^+} xe^{1/x} = +\infty$.

   On en déduit en particulier que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.
2. a) On pressent, au vu du calcul de la limite de f en $+\infty$, que la courbe devient presque "parallèle" à la droite d'équation $y = x$. Ceci n'est qu'une impression, que nous allons confirmer par le calcul :

   $$f(x) - x - 1 = xe^{1/x} - x - 1 = \frac{e^{1/x}}{1/x} - \frac{1}{1/x} - 1 = \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} - 1$$

   b) À quoi sert cette écriture ? Bien-sûr, à trouver la limite de la différence $f(x) - x - 1$ en $+\infty$. Que voit-on ? Eh bien, encore une fois, en posant $X = \frac{1}{x}$, ceci se réécrit :

   $$f(x) - x - 1 = \frac{e^X - 1}{X} - 1 = \frac{e^X - e^0}{X - 0} - 1$$

   et on reconnaît dans la première partie le taux de variation de la fonction exponentielle entre 0 et X. Lorsque x tend vers $+\infty$, X tend vers 0, et ce taux de variation tend vers le nombre dérivé de exp en 0, qui n'est autre que $\exp'(0) = \exp(0) = 1$.
   Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x - 1 = 0$, dont on déduit immédiatement que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.
   Il ne serait pas difficile de démontrer que la courbe reste sur tout l'intervalle $]0; +\infty[$ au dessus de Δ, mais ce résultat est admis[1].
3. f est produit de x, dérivable sur $\mathbb{R}$, et de la fonction composée $\exp \circ i$, où i est la fonction inverse, dérivable sur $\mathbb{R}^*+$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*+$ (en fait sur $\mathbb{R}^*$), et :

   $$f'(x) = e^{1/x} + x\left(-\frac{1}{x^2}e^{1/X}\right) = e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{e^{1/x}}{x}(x - 1)$$

   Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $(x - 1)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$, et on peut dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

B. **Étude de f sur** $]-\infty; 0[$

1. La limite de f en $-\infty$ se règle comme celle en $+\infty$: $e^{1/x}$ tend vers 1 en $-\infty$, x vers $-\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

   Pour la limite en 0 à gauche, il suffit de constater que la limite de $\frac{1}{x}$ en 0^- est $-\infty$, et que la limite de exp en $-\infty$ est 0. Donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

   la courbe $\mathscr{C}$ se rapproche donc de l'origine, *par la gauche seulement*.

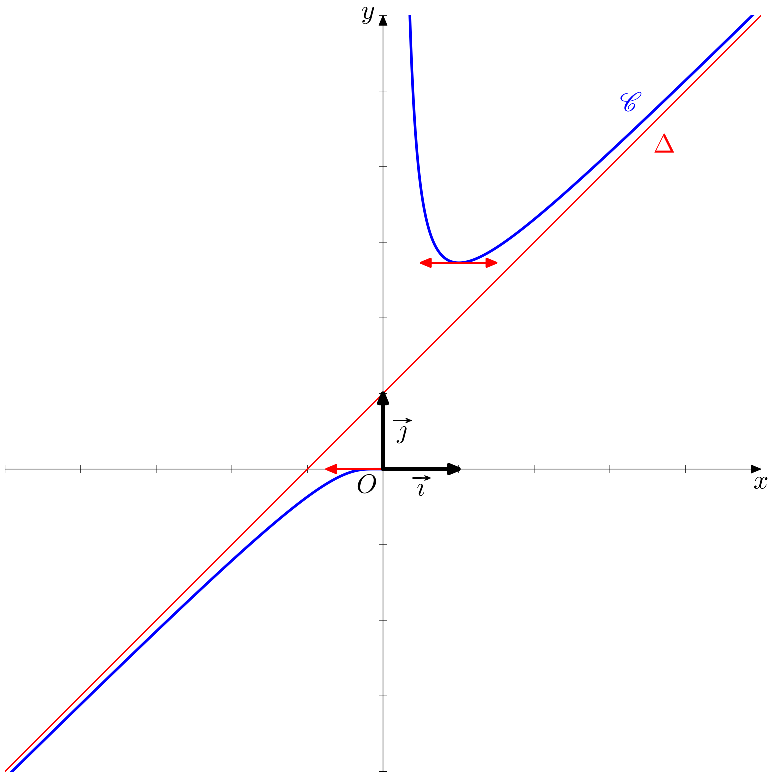
---

[1] Il s'agit de faire une étude du signe de la différence $f(x) - x - 1$, ce qui revient à comparer $\dfrac{e^X - 1}{X}$ à 1. On peut pour cela faire l'étude de la fonction $g : X \mapsto e^X - 1 - X$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

2. On ne refait pas les démonstrations, elles sont basées sur les mêmes calculs que dans la première partie, et les conclusions sont les mêmes (mise à part la position de la courbe par rapport à l'asymptote).
3. Dans cette question, on étudie le *prolongement par continuité* de f en 0 par la gauche.
   a) Le résultat provient simplement de la constatation suivante : pour tout $x < 0$,
   $$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = e^{1/x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$$
   b) Ainsi, le taux de variation de g en 0 (à gauche) a pour limite 0. On en déduit que g est dérivable (à gauche) en 0, et que $g'(0) = 0$.
   c) Tout se passe comme si on étudiait f, et que l'on rajoutait un point en 0 à sa courbe, obtenu par un calcul de limite. La dérivée de g sur $\mathbb{R}^{*-}$ est la même que celle de f, il n'y a donc pas de nouveau calcul à faire :

x	$-\infty$		0
$g'(x)$		$+$	0
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

4. Voici pour terminer la courbe représentative de la fonction étudiée, prolongée en 0 :



Exercice 2 : problème 98 p.112

Ici on étudie une famille de fonction $(f_m)_{m\in\mathbb{R}}$, chaque f_m étant définie par $f_m(x) = (x+m)\,e^x$, sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ étant notée $\mathscr{C}_m$.

Partie A

1. f_m est produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'_m(x) = e^x + (x+m)\,e^x = e^x(x+m+1)$, d'où le tableau des variations :

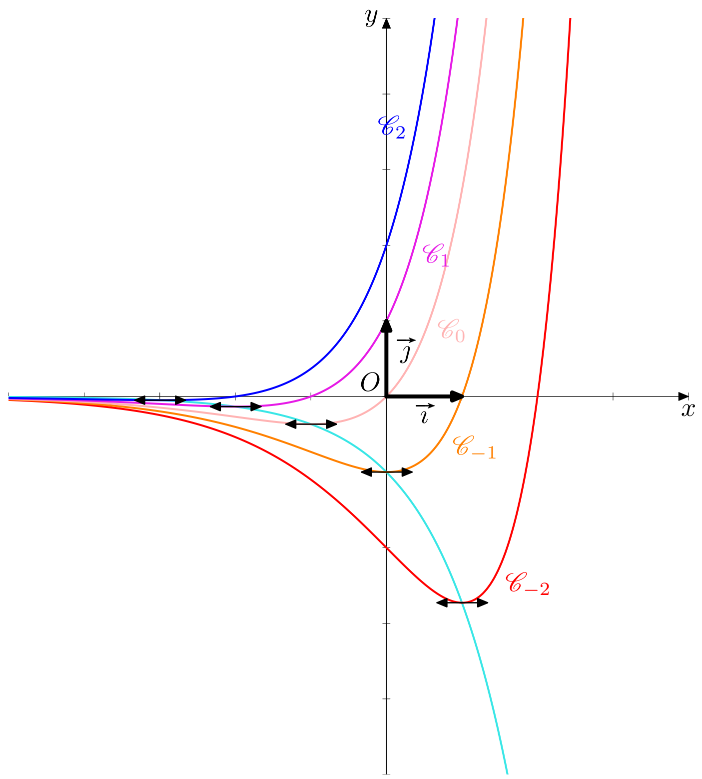
x	$-\infty$		$-m-1$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-m-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites notées dans ce tableau sont déterminées comme suit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x+m = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

D'autre part, $f(x) = xe^x + me^x$, et d'après le cours, ces deux termes ont pour limite 0 en $-\infty$ (exp est *négligeable* par rapport à toutes les fonctions puissances en $-\infty$). Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Enfin, $f_m(-m-1) = (-m-1+m)\,e^{-m-1} = -e^{-m-1}$.

2. a) La courbe $\mathscr{C}_m$ a une tangente horizontale en $S_m(x,y)$ si et seulement si $f'_m(x) = 0$, soit si $x = -m-1$. Les coordonnées de S_m sont donc $\left(-m-1, -e^{-m-1}\right)$.
   b) Lorsque m varie dans $\mathbb{R}$, $-m-1$ prend toutes les valeurs réelles, et en notant $x = -m-1$, l'ordonnée du point d'abscisse x est $-e^x$.
   Le lieu cherché est donc inclus dans la courbe $\mathscr{E}'$ d'équation $y = -e^x$. La réciproque est évidente : tout point $S(x,y)$ de cette courbe est le point S_m de la courbe $\mathscr{C}_m$ pour $m = -x-1$.
   Ainsi, le lieu géométrique $\mathscr{E}$ cherché est la courbe d'équation $y = -e^x$.
3. Voici les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_{-1}$ et $\mathscr{C}_{-2}$, ainsi que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, et le lieu $\mathscr{E}$.



4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Il s'agit de montrer que l'équation $f_m(a) = b$ d'inconnue m a une unique solution pour toute valeur du paramètre b. Cette équation s'écrit :
$$(a+m)\,e^a = b \iff a+m = be^{-a} \iff m = be^{-a} - a$$
L'existence et l'unicité de la solution de cette équation traduit l'existence et l'unicité de la courbe $\mathscr{C}_m$ passant par $(a;b)$.

Partie B

1. La tangente en M_m à la courbe $\mathscr{C}_m$ a pour coefficient directeur $f'_m(x_0) = (x_0+m+1)\,e^{x_0}$, et pour équation
$$\begin{aligned} y = f_m(x_0) + f'_m(x_0)(x-x_0) &\iff y = (x_0+m)\,e^{x_0} + (x_0+m+1)\,e^{x_0}(x-x_0) \\ &\iff y = e^{x_0}\left[(x_0+1)\,x - x_0^2 + m\,(1-x_0+x)\right] \end{aligned}$$
2. Pour que T_m passe par un point fixe, il faut qu'il existe des coordonnées x et y solutions de *toutes* les équations précédentes, pour *toutes* les valeurs de m.

On peut procéder de deux façons différentes : soit trouver le point d'intersection de deux tangentes particulières, soit chercher une caractéristique de l'équation précédente.

Pour que cette équation (d'inconnue $(x;y)$) admette une solution identique pour toute les valeurs de m, il faut que la même équation, vue cette fois comme équation d'inconnue m, admette une infinité de solutions. Comme c'est une équation du premier degré en m, elle admet une infinité de solution si et seulement si elle s'écrit $0m = 0$.

$$y = e^{x_0}\left[(x_0+1)\,x - x_0^2 + m\,(1 - x_0 + x)\right] \iff m\,(1 - x_0 + x) = ye^{-x_0} - (x_0+1)\,x + x_0^2$$

Il faut donc que

$$\begin{cases} 1 - x_0 + x = 0 \\ ye^{-x_0} - (x_0+1)\,x + x_0^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_0 - 1 \\ y = -e^{x_0} \end{cases}$$

Le point A a donc pour coordonnées $(x_0 - 1; -e^{x_0})$.

Partie C

1. Les points M_α, M_β et M_γ ont pour coordonnées respectives $(x; f_\alpha(x))$, $(x; f_\beta(x))$ et $(x; f_\gamma(x))$. Les coordonnées de $\overrightarrow{M_\beta M_\alpha}$ sont :

$$(x - x; f_\alpha(x) - f_\beta(x)) = (0; (x+\alpha)\,e^x - (x+\beta)\,e^x) = (0; (\alpha - \beta)\,e^x)$$

De même, les coordonnées de $\overrightarrow{M_\gamma M_\alpha}$ sont $(0; (\alpha - \gamma)\,e^x)$.

La constante k tel que $\overrightarrow{M_\beta M_\alpha} = k\overrightarrow{M_\gamma M_\alpha}$ est donc $k = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma}$ (on rappelle que α, β et γ sont deux-à-deux distincts.

2. a) On va traduire la relation vectorielle donnée en termes de barycentres[2]. Introduisons le point G_k, barycentre de $(M_\beta; 1)$ et $(M_\gamma; -k)$. On a alors :

$$\overrightarrow{M_\beta N} - k\overrightarrow{M_\gamma N} = (1-k)\,\overrightarrow{G_k N}$$

Dire que $\overrightarrow{M_\beta N} = k\overrightarrow{M_\gamma N}$ revient donc à dire que $(1-k)\,\overrightarrow{G_k N} = \vec{0}$, et comme $k \neq 1$ (sinon on ne pourrait parler du barycentre G_k), ceci équivaut à $N = G_k$.

Ceci garantit l'unicité du point N vérifiant l'identité vectorielle donnée. Or, d'après la première question, le point M_α convient, avec α tel que $k = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma}$, soit :

$$k = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma} \iff \alpha\,(k-1) = k\gamma - \beta \iff \alpha = \frac{k\gamma - \beta}{k - 1}$$

Ainsi[3], lorsque x parcourt $\mathbb{R}$, le point N défini dans la question parcourt la courbe $\mathscr{C}_\alpha$.

b) Pour $\beta = 0$, $\gamma = -2$ et $k = -1$, la courbe $\mathscr{E}_{-1}$ cherchée est la courbe $\mathscr{C}_\alpha$, avec

$$\alpha = \frac{(-1)\,(-2) + 0}{-1 - 1} = -1$$

[2] même si l'on pourrait procéder de manière complètement analytique.

[3] Le plan de cette démonstration est donc le suivant : on prouve d'abord que la relation vectorielle définit un unique point N, puis que ce point N est un point d'une courbe $\mathscr{C}_\alpha$.