Devoir surveillé n°1 : limites, probabilités

Exercice 1

Pour tromper l'ennui dans un Far-West de moins en moins attractif depuis que les Dalton se sont évadés de prison et ont fuit au Mexique, Lucky Luke et Calamity Jane décident de s'affronter en un duel. Pour ménager les âmes sensibles, ils tirent sur le chapeau de leur adversaire afin d'éviter une effusion de sang toujours mauvaise pour leur réputation.

- Lucky Luke, toujours très fort lorsqu'il s'agit de manier la gâchette, a 80% de chances de toucher son adversaire. Il met deux balles dans son revolver.
- Calamity Jane, en raison de son problème d'alcool, n'a qu'une chance sur trois d'atteindre sa cible. Elle met trois balles dans son revolver.
- Toujours galant homme, Luke laisse Calamity commencer à tirer. Si elle atteint le chapeau de Luke, le duel s'arrête.
- Sinon, Luke tire sur Calamity, et encore une fois, le duel s'arrête si Luke touche le chapeau adverse.
- Dans le cas contraire, le duel se poursuit, un tireur après l'autre, jusqu'à ce que l'un des tireurs touche sa cible, ou lorsque les deux revolvers sont vides.

Calculer les probabilités des trois événements suivants :

- A : "Calamity gagne, Luke paie la prochaine tournée" ;
- B : "Luke gagne, Calamity promet d'arrêter de boire" ;
- C : "les deux chapeaux sortent intacts du duel, mais attiré par le boucan, le shériff local les mets tous les deux en prison" (Luke et Calamity, pas leurs chapeaux !).

On mettra les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$ tout entier.
2) Étudier les variations de la fonction g définie par $g(x) = x^2 + 2x + 3$. En déduire le tableau des variations de f.
3) Trouver les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
4) (a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 1$ *(Indication : penser à la quantité conjuguée).*
   (b) En déduire l'existence d'une asymptote oblique Δ à la courbe $\mathscr{C}$.
   (c) Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
5) Trouver $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + x$. En déduire l'existence d'une autre asymptote Δ' à la courbe $\mathscr{C}$.
6) Montrer que $f(-1+h) = f(-1-h)$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de la courbe.
7) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère d'unité 2cm.

ROC : fonctions trigonométriques

On rappelle les résultats suivants, qui pourront être utilisés sans démonstration :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

À l'aide de ces deux limites, redémontrer que les fonctions sin et cos sont dérivables en 0, puis qu'elles le sont sur $\mathbb{R}$ tout entier, et vérifient : $\sin' = \cos$, et $\cos' = -\sin$.