# Devoir surveillé n°2 : limites, probabilités, récurrence

## Exercice 1 : une banane dans l'oreille

Un même individu peut être atteint de surdité unilatérale (portant sur une seul oreille), ou bilatérale (portant sur ses deux oreilles). On admet que, dans une population donnée, les deux événements

- $D$ : « être atteint de surdité à l'oreille droite », et
- $G$ : « être atteint de surdité à l'oreille gauche »

sont indépendants, et tous deux de probabilité 0,05, ce que l'on note $P(G) = P(D) = 0{,}05$.
On considère les événements suivants :

- $B$ : « être atteint de surdité bilatérale »
- $U$ : « être atteint de surdité unilatérale »
- $S$ : « être atteint de surdité (sur une oreille au moins) ».

On donnera les valeurs numériques des probabilités demandées sous forme décimale approchée à $10^{-4}$ près.

1) (a) Calculer $P(D \cap G)$, et en déduire $P\left(D \cap \overline{G}\right)$, $P\left(\overline{D} \cap G\right)$ et $P\left(\overline{D} \cap \overline{G}\right)$.
   (b) Vérifier l'indépendance des événements $D$ et $\overline{G}$, $\overline{D}$ et $G$ et $\overline{D}$ et $\overline{G}$.
   (c) Calculer $P(B)$, $P(S)$ et $P(U)$.
2) On suppose qu'un sujet pris au hasard dans la population considérée est atteint de surdité. Quelle est la probabilité :
   (a) qu'il soit atteint de surdité à droite ?
   (b) qu'il soit atteint de surdité bilatérale ?
3) Calculer $P(D \cap U)$, puis $P\left(D \cap \overline{U}\right)$. En déduire $P_U(D)$, ainsi que $P_{\overline{U}}(D)$.
4) Calculer la probabilité que, sur 10 personnes de cette population prises au hasard, au moins l'une d'entre elles soit atteinte de surdité bilatérale.

## Exercice 2 : une fonction toute bête

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$.

1) (a) Étudier le sens de variation de $f$.
   (b) Déterminer les limites de $f$ en 2 (à gauche et à droite).
2) (a) Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Déterminer des réels $a$, $b$ et $c$ tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$ pour tout $x \neq 2$.
   (c) En déduire que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de $f$ admet une asymptote $D$ en $+\infty$ et $-\infty$. Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $D$.
3) Tracer soigneusement $\mathscr{C}$ ainsi que tous les éléments trouvés au cours de l'étude. Prendre au moins deux carreaux, ou mieux deux centimètres pour une unité sur les deux axes.

## Exercice 3 : et pour finir, une petite... et puis non, si je le dis, c'est trop facile !

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ (on rappelle que $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.