Corrigé devoir surveillé n°2

Exercice 1 : une banane dans l'oreille

1) (a) D et G sont indépendants, donc $P(D \cap G) = P(D) \times P(G) = 0{,}05 \times 0{,}05 = \boxed{0{,}0025}$.

D est union disjointe de $D \cap G$ et $D \cap \overline{G}$, donc $P\left(D \cap \overline{G}\right) = P(D) - P(D \cap G) = 0{,}05 - 0{,}0025 = \boxed{0{,}0475}$.

Par le même raisonnement, on trouve aussi $P\left(\overline{D} \cap G\right) = P(G) - P(D \cap G) = 0{,}05 - 0{,}0025 = \boxed{0{,}0475}$.

Enfin, l'événement contraire de $\overline{D} \cap \overline{G}$ est $D \cup G$, donc

$P\left(\overline{D} \cap \overline{G}\right) = 1 - P(D \cup G) = 1 - (P(D) + P(G) - P(D \cap G)) = 1 - (0{,}05 - 0{,}05 + 0{,}0025) = \boxed{0{,}9025}$

(b) On vérifie rapidement (et c'est un résultat général, comme vu en TD), que :

- $P(D) \times P\left(\overline{G}\right) = 0,!05 \times 0{,}995 = 0{,}0475 = P\left(D \cap \overline{G}\right)$, donc D et $\overline{G}$ sont indépendants ;
- $P\left(\overline{D}\right) \times P(G) = 0{,}995 \times 0,!05 = 0{,}0475 = P\left(\overline{D} \cap G\right)$, donc $\overline{D}$ et G sont indépendants ;
- $P\left(\overline{D}\right) \times P\left(\overline{G}\right) = 0,!995 \times 0{,}995 = 0{,}9025 = P\left(\overline{D} \cap \overline{G}\right)$, donc $\overline{D}$ et $\overline{G}$ sont indépendants.

(c)
- $B = D \cap G$, donc $P(B) = P(D \cap G) = \boxed{0{,}0025}$;
- $S = D \cup G$, donc $P(S) = P(D) + P(G) - P(D \cap G) = 0{,}05 + 0{,}05 - 0{,}0025 = \boxed{0{,}0975}$;
- S est réunion disjointe de B et S, donc $P(U) = P(S) - P(B) = 0{,}0975 - 0{,}0025 = \boxed{0{,}095}$.

2) Il s'agit de calculer des probabilités conditionnelles, sachant S.

(a) $P_S(D) = \dfrac{P(D \cap S)}{P(S)}$. Or $D \subset S$, donc $P(D \cap S) = P(D)$, d'où $P_S(D) = \dfrac{P(D)}{P(S)} = \dfrac{0{,}05}{0{,}0975} \approx \boxed{0{,}5128}$;

(b) $P_S(B) = \dfrac{P(B \cap S)}{P(S)}$. De la même façon $B \subset S$, donc $P_S(B) = \dfrac{P(B)}{P(S)} = \dfrac{0{,}0025}{0{,}0975} \approx \boxed{0{,}0256}$.

3) $D \cap U = D \cap \overline{G}$, donc $P(D \cap U) = P\left(D \cap \overline{G}\right) = \boxed{0{,}0475}$.

De même, $D \cap \overline{U} = D \cap B = D \cap G$, donc $P\left(D \cap \overline{U}\right) = P(D \cap G) = \boxed{0{,}0025}$.

On en déduit :

- $P_U(D) = \dfrac{P(D \cap U)}{P(U)} = \dfrac{0{,}0475}{0{,}095} = 0{,}5$, ce qui ne devrait pas nous étonner, puisqu'il y a autant de chance pour qu'un individu atteint d'une surdité unilatérale le soit de l'oreille droite que de l'oreille gauche ;
- $P_{\overline{U}}(D) = \dfrac{P\left(D \cap \overline{U}\right)}{P\left(\overline{U}\right)} = \dfrac{0{,}0025}{0{,}0975} \approx \boxed{0{,}0028}$.

4) L'événement contraire de "au moins une personne atteinte de surdité bilatérale" est "aucune personne atteinte de surdité bilatérale".

On peut imaginer, pour représenter cette situation, un arbre à 10 étage. On s'intéresse dans cet arbre au chemin passant par les dix événements $\overline{B}$, sa probabilité est $P\left(\overline{B}\right)^{10}$.

Donc la probabilité qu'au moins une personne soit atteinte de surdité bilatérale est $1 - P\left(\overline{B}\right)^{10} = 1 - 0{,}9975^{10} \approx 0{,}0247$.

Exercice 2 : une fonction toute bête

1) (a) f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition, ici $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

On peut donc dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$, et $\lim\limits_{x\to 2^+} x-2 = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = +\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to 2^-} x-2 = 0^-$, donc $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = -\infty$.

On peut en déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote verticale Δ d'équation $x = 2$.

2) (a) D'après le théorème sur la limite en $\pm\infty$ d'une fonction rationnelle,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

et de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.

(b) Procédons par identification :

$$ax + b + \frac{c}{x-2} = \frac{ax(x-2) + b(x-2) + c}{x-2} = \frac{ax^2 + (b-2a)x + c - 2b}{x-2}$$

donc par identification des numérateurs *coefficient par coefficient* :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 0 \\ c - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x \neq 2$, $f(x) = x + 2 + \dfrac{4}{x-2}$.

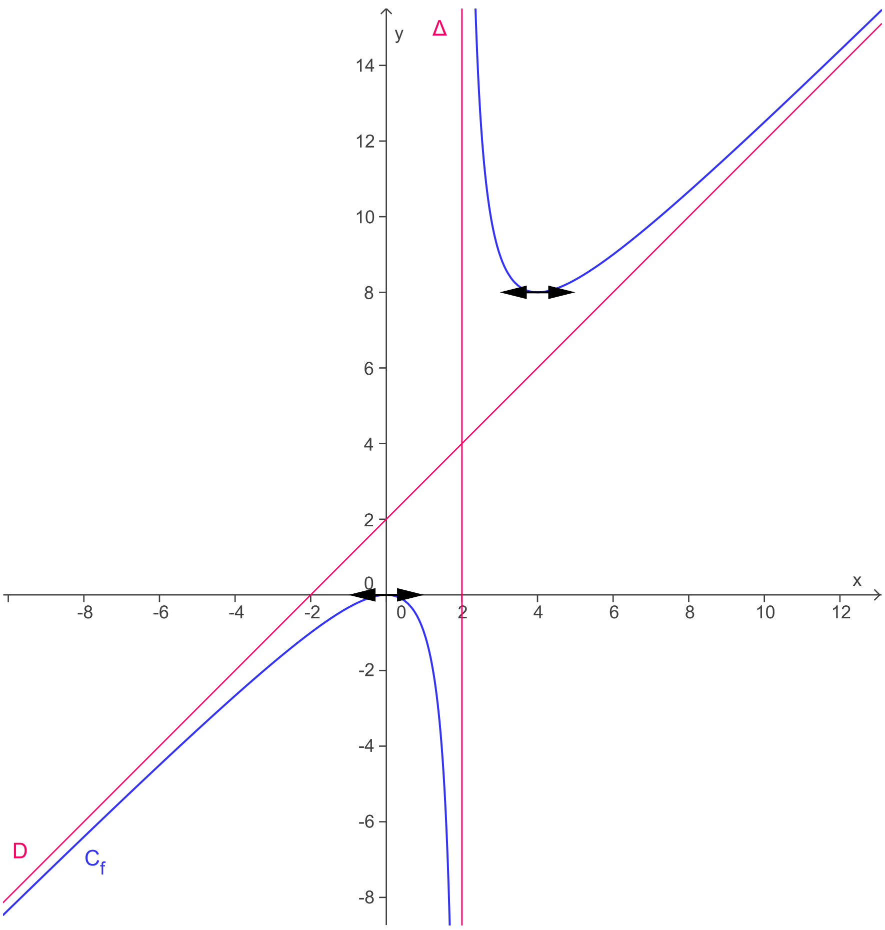
(c) On a donc

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (x+2) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x-2} = 0$$

donc la droite D d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe représentative de f.

La position de $\mathscr{C}$ par rapport à D est déterminée par le signe de la différence $f(x) - (x+2) = \dfrac{4}{x-2}$, donc $\mathscr{C}$ est au dessus de D sur l'intervalle $]2; +\infty[$, en dessous sur l'intervalle $]-\infty; 2[$.

3) Et pour finir, la belle courbe, avec les deux asymptotes, et les tangentes horizontales repérées par l'étude des variations :



Exercice 3 : et pour finir, une petite... et puis non, si je le dis, c'est trop facile !

Il s'agit bien-sûr de faire une récurrence. Notons

$$u_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \quad \text{et} \quad v_n = (1 + 2 + \cdots + n)^2 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$$

Il s'agit de démontrer que l'hypothèse $\mathscr{P}_n : u_n = v_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Elle est vraie de façon évidente pour $n = 0$, puisque $u_0 = v_0 = 0$.
- Supposons-la vraie pour un entier n. On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2\,\left(n^2 + 4\,(n+1)\right)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4} = v_{n+1} \end{aligned}$$

  donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie.

Ainsi, $\mathscr{P}_n$ est, d'après le principe de récurrence, vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.