Devoir surveillé n°3 : fonction exponentielle, probabilités, récurrence

ROC

On sait que la fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\exp' = \exp$, et $\exp(0) = 1$.

1) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x$.
2) En étudiant la fonction $g : x \mapsto e^x - \dfrac{x^2}{2}$, montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
3) En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

Exercice 1 : et pour une courbe de plus

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - 4\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2) (a) Trouver les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   (b) Montrer que les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $y = x + 4$ et $y = x - 4$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   (c) Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport aux droites d_1 et d_2.
3) (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $f'(x) = \dfrac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$.
   (b) Montrer que $e^{2x} - 2e^x + 1 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire le tableau de variations de f.
4) Donner une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
5) Tracer la courbe représentative de f, ainsi que les droites d_1 et d_2, et la tangente T.

Exercice 2 : comment (ne pas) arrêter de fumer ?

Un fumeur décide de réduire sa consommation. On admet qu'il fonctionne de la façon suivante :

- S'il reste un jour sans fumer, alors il fume le lendemain avec une probabilité de 0,4.
- Par contre, s'il cède et fume un jour, alors la probabilité qu'il fume le lendemain est de 0,2.

On note p_n la probabilité qu'il fume le $n^{\text{ème}}$ jour (par hypothèse, $p_0 = 1$).

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = 0{,}4 - 0{,}2p_n$.
2) On pose $v_n = p_n - \dfrac{1}{3}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $\dfrac{2}{3}$ et de raison $-\dfrac{1}{5}$.
3) En déduire la valeur de v_n en fonction de n, puis celle de p_n en fonction de n.
4) Quelle est la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini ? Que peut-on en déduire ?

Exercice 3 : une propriété d'une suite récurrente

On étudie la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
2) *Question ouverte* : conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.