

# Devoir surveillé n°4 : complexes, continuité, exponentielle...

## Exercice 1 : complexes et géométrie

Soit  $u$  un nombre complexe fixé. À tout  $z \in \mathbb{C}$  distinct de 1, on associe le nombre  $Z = \frac{u - \bar{u}z}{1 - z}$ .

Trouver l'ensemble des points  $M$  du plan, d'affixe  $z$ , tels que  $Z$  soit réel.

*Indication : la résolution devrait distinguer le cas "u réel" du cas général.*

## Exercice 2 : des équations et des fonctions

Pour tout  $\alpha$  réel non nul, on considère l'équation, à l'inconnue réelle  $x$  :

$$(E_\alpha) : \alpha x^2 - 2x + 1 = 0$$

### 1) Des exemples

Résoudre les équations  $(E_\alpha)$  pour  $\alpha = 1, -1$  et  $-3$ .

### 2) Résolution générale

- (a) Déterminer les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles  $(E_\alpha)$  admet deux solutions réelles (préciser si elles sont confondues ou distinctes).
- (b) Exprimer les solutions de  $(E_\alpha)$  en fonction de  $\alpha$ .
- (c) On définit, sur  $D = ]-\infty; 0[ \cup ]0; 1]$  les deux fonctions  $f$  et  $g$  par :

$$f(\alpha) = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \alpha}} \quad \text{et} \quad g(\alpha) = \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \alpha}}$$

Montrer que, pour tout  $\alpha \in D$ ,  $f(\alpha)$  et  $g(\alpha)$  sont les solutions de  $(E_\alpha)$ .

### 3) Étude de la fonction $f$

- (a) Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en 0. Interpréter graphiquement.
- (b) Étudier le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variations.
- (c) Tracer sa courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé avec pour unité graphique 4 cm.

### 4) Étude de la fonction $g$

Reprendre les questions de la partie précédente pour la fonction  $g$ , dont on tracera la courbe représentative  $\mathcal{C}_g$  dans le même repère que  $\mathcal{C}_f$ .

### 5) Réciproque

- (a) Montrer que tout réel  $x$  non nul est solution de l'équation  $(E_\alpha)$ , avec  $\alpha = \varphi(x)$ ,  $\varphi$  étant la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $\varphi(x) = \frac{2x - 1}{x^2}$ .
- (b) Étudier le sens de variation de  $\varphi$ , ainsi que ses limites en 0,  $+\infty$  et  $-\infty$ .
- (c) Tracer la courbe  $\Gamma$  représentant  $\varphi$  sur le même graphique que  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ , d'une autre couleur.  
Quelle conjecture peut-on faire sur la courbe  $\Gamma$  par rapport à la réunion de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

### Exercice 3 : une équation dans $\mathbb{C}$

On cherche trois nombres complexes  $x$ ,  $y$  et  $z$ , de module 1, vérifiant :

$$x + y + z = 1 \quad (1) \quad \text{et} \quad xyz = 1 \quad (2)$$

- 1) Démontrer que l'on a  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ .

En déduire que  $x$ ,  $y$  et  $z$  doivent vérifier :  $xy + xz + yz = 1$  (3).

- 2) Montrer que (1), (2) et (3) entraînent :  $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$  (4). En constatant que 1 est racine de cette équation, en trouver les trois racines.
- 3) En déduire toutes les solutions du problème initial.

### Exercice 4 : Probabilités

Une urne  $U_1$  contient deux jetons numérotés 1 et 2. Une urne  $U_2$  contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4.

- 1) On choisit au hasard une urne, puis on extrait un jeton de cette urne, toujours au hasard.
- (a) Calculer la probabilité de l'événement  $A$  : « obtenir un jeton numéroté 1 ».
  - (b) On a tiré un jeton portant le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne  $U_1$  ?
- 2) On tire désormais au hasard un jeton de chaque urne. On désigne par  $X_1$  (respectivement  $X_2$ ) la variable aléatoire prenant la valeur du jeton extrait de l'urne  $U_1$  (respectivement  $U_2$ ).
- (a) Justifier l'indépendance des variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$ .
  - (b) Calculer la probabilité de tirer 2 jetons identiques.
  - (c) Soit  $S$  la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe la somme des numéros des 2 jetons tirés. Déterminer la loi de probabilité de  $S$ .
  - (d) Deux joueurs, Anatole et Béatrice, décident que si la somme des numéros tirés est supérieure à 4, Anatole donne 10€ à Béatrice, et que, dans le cas contraire, Béatrice donne  $\alpha$ € à Anatole.

On note  $Z$  la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique d'Anatole. Calculer l'espérance mathématique de  $Z$  en fonction de  $\alpha$ , puis déterminer  $\alpha$  pour que le jeu soit équitable.