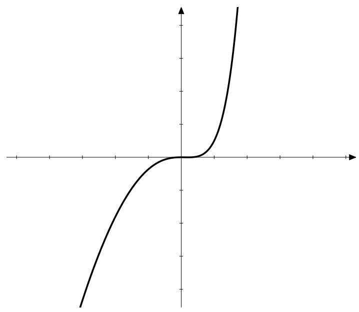
Devoir surveillé n°5 : plein d'exercices super chouettes

Exercice 1 : allez, une 'tite fonction pour se mettre en forme

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 e^{x-1} - \dfrac{x^2}{2}$.

Le graphique suivant est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.



1) **Conjectures**

   À l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant :

   - le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$?
   - la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses ?

   On se propose dans la suite de cet exercice de valider ou d'invalider les conjectures émises.

2) **Contrôle de la première conjecture**

   (a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et montrer que $f'(x) = xg(x)$, où g est définie par : $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.

   (b) *Étude du signe de $g(x)$ pour x réel*

      i. Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis quand x tend vers $-\infty$.

      ii. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x.

      iii. En déduire le tableau de variations de g.

      iv. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution.
      Montrer que $0{,}20 < \alpha < 0{,}21$.

      v. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

   (c) *Sens de variation de f sur $\mathbb{R}$*

      i. Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
      En déduire le sens de variation de la fonction f.

      ii. Que pensez-vous de la première conjecture ?

3) **Contrôle de la deuxième conjecture**

   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   On se propose de contrôler la position de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe $(x'x)$.

   (a) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

(b) On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $h(x) = \dfrac{-x^3}{2(x+2)}$.

i. Dresser le tableau de variations de h sur $[0;1]$.

ii. En déduire une encadrement de $f(\alpha)$.

(c) i. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe $(x'x)$.

ii. Préciser alors la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

iii. Que pensez-vous de la deuxième conjecture ?

Exercice 2 : équation polynomiale

On considère l'équation $(E)\ :\ z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0$, d'inconnue z complexe.

1) Montrer que (E) admet une solution réelle, notée z_1, et la déterminer *(on justifiera que cette solution est bien la seule solution réelle).*

2) Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait :
$$z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z - z_1)(z - 2 - 2i)(az + b)$$

3) Résoudre (E).

Exercice 3 : relation métrique dans le rectangle

$ABCD$ est un rectangle de longueur L et de largeur l. Soient H et K les projetés orthogonaux des sommets B et D sur la diagonale (AC).

1) (a) Montrer que $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = L^2 - l^2$.

(b) Montrer que $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = CA.HK$.

(c) En déduire HK en fonction de L et l.

2) Comment choisir L et l pour avoir $AC = 2HK$?

Exercice 4 : récurons !

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$.

(a) Montrer, par récurrence sur n, que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \dbinom{n}{2}$.

(b) Exprimer, en fonction de n, la somme : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.