Corrigé du devoir surveillé n°5

Exercice 1 : allez, une 'tite fonction pour se mettre en forme

1) **Conjectures**

En observant la courbe fournie, on peut supposer que :

- la fonction f semble strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
- la courbe représentative de la fonction f semble en dessous de l'axe des abscisses pour $x < 0$, et au dessus pour $x > 0$.

2) **Contrôle de la première conjecture**

(a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = \left(2x + x^2\right) e^{x-1} - x = x\left((x+2)\, e^{x-1} - 1\right) = xg(x)$.

(b) *Étude du signe de $g(x)$ pour x réel*

i.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 2 = +\infty$, et, par composition, $\lim\limits_{x\to} e^{x-1} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
- $g(x) = e^{-1}\left(xe^x + 2e^x\right) - 1$, or $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$.

ii. $g'(x) = (x+3)\, e^{x-1}$, le signe de $g'(x)$ est celui de $x+3$, donc négatif si $x < -3$ et positif si $x > -3$.

iii. Le tableau de variations de g est donc :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$g(-3)$	$\nearrow$	$+\infty$

iv. $g(-3) = -e^{-4} - 1 < 0$, g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-3; +\infty[$, donc g réalise une bijection de $[-3; +\infty[$ sur son image $\left[-e^{-4} - 1; +\infty\right[$.
g s'annule donc une fois et une seule sur cet intervalle, et ne prend que des valeurs strictement négatives sur l'intervalle $]-\infty; -3]$. L'équation $g(x) = 0$ a donc une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
Une recherche dichotomique de α donne successivement : $0 < \alpha < 1$, puis $0{,}2 < \alpha < 0{,}3$, et enfin $0{,}20 < \alpha < 0{,}21$.

v. Le signe de $g(x)$ est donc donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(c) *Sens de variation de f sur $\mathbb{R}$*

i. Comme $f'(x) = xg(x)$, on déduit du tableau précédent le signe de $f'(x)$, puis le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

En ce qui concerne les limites (qui ne sont pas demandées) :
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,
- $f(x) = x^2\left(e^{x-1} - \frac{1}{2}\right)$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

ii. Au temps pour la première conjecture ! f n'est donc pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puisqu'elle est décroissante sur l'intervalle $[0; \alpha]$.
On ne pouvait rien voir sur la courbe proposée. En effet, de $g(\alpha) = 0$, on déduit $e^{\alpha-1} = \dfrac{1}{\alpha+2}$,
donc $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{\alpha+2} - \dfrac{\alpha^2}{2} = -\dfrac{\alpha^3}{2(\alpha+2)} \approx 0{,}0018$.
La courbe est donc presque "collée" à l'axe des abscisses.

3) **Contrôle de la deuxième conjecture**

(a) On a déjà vu que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

(b) i. $h'(x) = -\dfrac{3x^2(x+2) - x^3}{2(x+2)^2} = -\dfrac{x^2(x+3)}{(x+2)^2}$.

On en déduit le tableau de variations de h sur l'intervalle $[0,1]$:

x	0		1
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{6}$

ii. h est strictement décroissante sur $[0;1]$ donc, comme $0{,}20 < \alpha < 0{,}21$, $h(0{,}20) > h(\alpha) = f(\alpha) > h(0{,}21)$, soit :

$$0{,}0018 < f(\alpha) < 0{,}0021$$

(c) i. La courbe $\mathscr{C}$ rencontre l'axe des abscisses lorsque $f(x)$ s'annule, soit lorsque

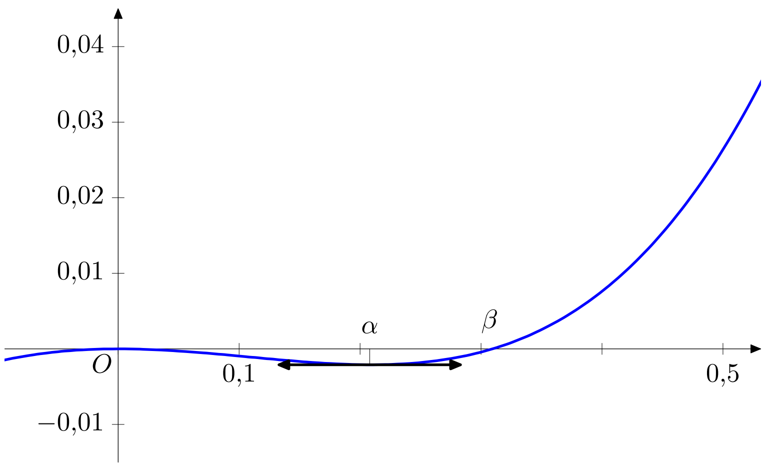
$$x^2\left(e^{x-1} - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } e^{x-1} = \frac{1}{2}$$

La deuxième équation a une unique solution β, dont nous verrons bientôt qu'elle se note $1 - \ln 2$ et vaut approximativement 0,307.

ii. La courbe représentative de f est donc en dessous de l'axe des abscisses sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;\beta[$, et au dessus sur l'intervalle $]\beta;+\infty[$.

iii. Et voilà comment on tord le cou à la deuxième conjecture.

Pour finir, voici un "zoom" sur la courbe entre 0 et 0,5 :



Exercice 2 : équation polynomiale

1) Si z_1 est solution réelle de (E), alors en séparant les parties réelle et imaginaire, on obtient :

$$\begin{cases} z_1^3 - 4z_1^2 + 7z_1 - 4 = 0 \\ -z^2 + z = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation a pour solutions 0 et 1, mais seule 1 est solution de la première équation. Ainsi (E) admet pour unique solution réelle $z_1 = 1$.

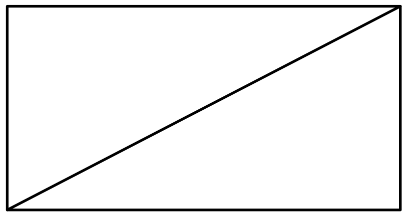
2) Par identification des termes en z^3, on obtient certainement $a = 1$. Le terme constant donne alors :

$$-4 = -1(-2-2i)\,b \iff b = \frac{4}{-2-2i} = \frac{-2}{1+i} = \frac{-2(1-i)}{2} = i - 1$$

Reste à vérifier que $(z-1)(z-2-2i)(z+i-1)$ se développe bien en $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4$.

3) Un produit étant nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, l'équation (E) a donc trois solutions : 1, $2+2i$ et $1-i$.

Exercice 3 : relation métrique dans le rectangle



1) (a) Commençons par exprimer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}$ en fonction des longueurs des cotés du rectangle :

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right).\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AD}$$

Or $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}^2 = L^2$, $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AD}^2 = -l^2$, et les deux autres produits scalaires sont nuls puisque leurs facteurs sont orthogonaux. Il reste donc :

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = L^2 - l^2$$

(b) Introduisons maintenant H et K :

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}.\left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{KD}\right) = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{KD}$$

Les deux produits scalaires $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{KD}$ sont nuls, il ne reste que $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{HK} = CA.HK$, ce deux derniers vecteurs étant colinéaires et de même sens.

(c) On a donc $CA.HK = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{HK} = L^2 - l^2$, et $CA^2 = CD^2 + DA^2 = L^2 + l^2$, d'où :

$$HK = \frac{L^2 - l^2}{\sqrt{L^2 + l^2}}$$

2) $AC = 2HK$ équivaut à $\sqrt{L^2+l^2} = 2\dfrac{L^2-l^2}{\sqrt{L^2+l^2}}$, soit encore $L^2 + l^2 = 2\left(L^2 - l^2\right)$, i.e. $L^2 = 3l^2$. On doit donc prendre $L = l\sqrt{3}$ pour avoir $AC = 2HK$.

Exercice 4 : récurons !

Quelques démonstrations par récurrence dans cet exercice.

1) Notons P_n la propriété : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- P_1 est vraie : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$, et $\dfrac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = 1$.
- Supposons P_n vraie pour un certain $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\left(2n^2+n+6n+6\right)}{6} \\ &= \frac{(n+1)\left(2n^2+7n+6\right)}{6}\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à vérifier que $(n+1)\left(2n^2+7n+6\right) = (n+1)(n+2)(2(n+1)+1)$, par exemple en développant. P_{n+1} est donc encore vraie.

Ainsi, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) (a) Notons ici Q_n la propriété : $u_n = \binom{n}{2}$.

- P_2 est vraie : $u_1 = 0 + 0 = 0$, donc $u_2 = u_1 + 1 = 1$, et $\binom{2}{2} = 1$.
- Supposons Q_n vraie pour un certain $n \geqslant 2$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = u_n + n = \binom{n}{2} + n &= \frac{n\,(n-1)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} \\ &= \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2} \end{aligned}$$

donc Q_{n+1} est encore vraie.

Ainsi, Q_n est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

(b) D'après ce qui précède,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = 0 + 0 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{n\,(n-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n} n^2 - \sum_{k=2}^{n} n\right)$$

D'après la première question, $\sum_{k=2}^{n} n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} - 1$, et on sait depuis la première que $\sum_{k=2}^{n} n = \frac{n\,(n+1)}{2} - 1$. Ainsi :

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} - \frac{n\,(n+1)}{2}\right) = \frac{n\,(n+1)}{12}\,(2n+1-3) = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{6}$$

relation que l'on peut contrôler sur les premiers termes.