Devoir surveillé n°6 : Suites, fonctions et complexes

Exercice 1 : prise d'initiative

Montrer de manière rigoureuse que l'équation $x^4 + x^3 - x + 1 = 0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : affixe de l'orthocentre d'un triangle

On rappelle les points suivants du cours sur les nombres complexes :

- un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$;
- un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$;
- pour tout nombre complexe z, $|z|^2 = z\overline{z}$;
- si a, b et c sont les affixes des points A, B et C distincts deux à deux, $\dfrac{c-a}{b-a}$ est imaginaire pur si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B, C deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine O, a pour orthocentre le point H d'affixe $a + b + c$.

1) **Étude d'un cas particulier**

   On pose : $a = 3 + i$, $b = -1 + 3i$ et $c = -\sqrt{5} - i\sqrt{5}$.

   (a) Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

   (b) Placer les points A, B, C et le point H d'affixe $a + b + c$, puis vérifier *graphiquement* que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

2) **Étude du cas général**

   ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et a, b, c sont les affixes respectives des points A, B et C.

   (a) Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}$.

   (b) On pose $w = \overline{b}c - b\overline{c}$.

      i. En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur rappelée plus haut, démontrer que w est imaginaire pur.

      ii. Vérifier l'égalité : $(b + c)\left(\overline{b} - \overline{c}\right) = w$ et justifier que : $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{w}{|b-c|^2}$.

      iii. En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.

   (c) Soit H le point d'affixe $a + b + c$.

      i. Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.

      ii. Prouver que $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

Exercice 3 : étude de deux suites récurrentes

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;2]$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;2]$. Montrer que si $x \in [1;2]$, alors $f(x) \in [1;2]$.

2) (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

   - $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$,
   - $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

   (a) Le graphique donné en fin de devoir représente la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$.
   Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
   À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

   (b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

   - pour tout entier naturel n, $1 \leqslant v_n \leqslant 2$,
   - pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leqslant v_n$.

   On admet que l'on peut démontrer de la même façon que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$.

   (c) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

   En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \geqslant 0$ et $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.

   (d) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

   (e) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α, et déterminer la valeur exacte de α.