Corrigé du devoir surveillé n°6 : Suites, fonctions et complexes

Exercice 1 : prise d'initiative

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + x^3 - x + 1$. Il s'agit de vérifier que cette fonction polynôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

f étant continue, elle doit donc garder un signe constant sur $\mathbb{R}$. Essayons de déterminer ce signe en effectuant une étude de variations.

$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$. f' est une fonction polynôme de degré 3, qui n'a pas de racine évidente, il va donc être difficile d'en étudier le signe. L'idée consiste donc à redériver.

$f''(x) = 12x^2 + 6x = 6x(2x+1)$. On peut donc dresser le tableau de variations[1] de f' :

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-3/4$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

L'étude de ce tableau montre que f' s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$, en $\alpha \in]0;+\infty[$. En effet, f' ne prend que des valeurs strictement négatives sur $\mathbb{R}^-$, et réalise une bijection strictement croissante de $[0;+\infty[$ sur $[-1;+\infty[$, étant continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

On peut alors déduire de cela le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Reste un petit soucis : trouver le signe de $f(\alpha)$. Pour cela, constatons que $f'(0) = -1 < 0$, alors que $f'(1) = 6 > 0$. De ceci, on déduit que $0 < \alpha < 1$. Donc

$$f(\alpha) = \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha + 1 > -\alpha + 1 > 0$$

la première inégalité étant due au fait que α est positif, donc $\alpha^4 + \alpha^3$ aussi, la deuxième venant du fait que $\alpha < 1$.

Ainsi, $f(\alpha)$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$, il est strictement positif, donc f ne prend que des valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$. L'équation $f(x) = 0$ n'a donc pas de solution réelle. QED.

Exercice 2 : affixe de l'orthocentre d'un triangle

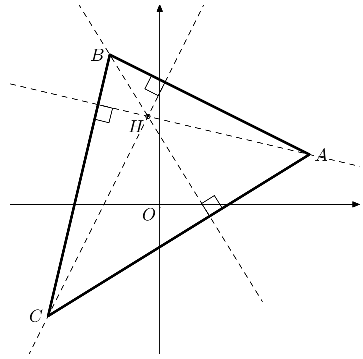
1) Étude d'un cas particulier

(a) Il s'agit ici de vérifier que A, B et C sont à la même distance de l'origine, ce qui revient à montrer que a, b et c ont *même module*. Or :

$$|a| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} = |b| \quad \text{et} \quad |c| = \sqrt{\sqrt{5}^5 + \sqrt{5}^2} = \sqrt{10}$$

[1] Les limites de toutes ces fonctions polynômes ne posent pas de problème, elles ne seront donc pas détaillées dans ce corrigé. Dans un devoir, il est bon d'en détailler une pour montrer qu'on sait faire, mais de ne pas trop s'étendre sur le sujet pour éviter de perdre du temps.

(b) Un simple petit dessin suffit. Il doit être suffisamment précis pour que la lecture des angles droits ne soit pas trop faussée.



2) **Étude du cas général**

(a) Dire que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC revient à dire que O est à égale distance de A, B et C, soit que les modules de a, b et c sont égaux, soit encore, puisque ces nombres sont positifs, que leurs carrés soient égaux. D'après les rappels (ou plutôt le cours, on n'a pas besoin des rappels !), cela se traduit par :

$$|a|^2 = |b|^2 = |c|^2 \iff a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}$$

(b) Ici donc $w = \overline{b}c - b\overline{c}$.

i. $\overline{w} = \overline{\overline{b}c - b\overline{c}} = b\overline{c} - \overline{b}c = -w$, ce qui signifie que w est imaginaire pur.

ii. $(b+c)\left(\overline{b} - \overline{c}\right) = b\overline{b} + c\overline{b} - b\overline{c} - c\overline{c} = c\overline{b} - b\overline{c} = w$, puisque par hypothèse $b\overline{b} = c\overline{c}$.
D'autre part, en utilisant une technique éprouvée du cours sur les complexes :

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{(b+c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right)}{(b-c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right)} = \frac{w}{|b-c|^2}$$

iii. On a montré que w est imaginaire pur. Il en est donc de même de $\dfrac{w}{|b-c|^2}$, $|b-c|$ étant réel, et donc de $\dfrac{b+c}{b-c}$.

(c) Ici H est le point d'affixe $h = a+b+c$.

i. L'affixe de $\overrightarrow{AH}$ est $h - a = b + c$, celui de $\overrightarrow{CB}$ est $b - c$.

ii. On a vu dans la question précédente que $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur. Cela signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux, ou encore que $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

iii. Il suffit, pour démontrer que $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont orthogonaux (ce qui n'est pas demandé), de faire jouer la symétrie des rôles de A, B et C dans les calculs.
Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{CB}$, donc les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires. (AH) est donc la hauteur du triangle ABC issue de A.
De même, (BH) est la hauteur de ABC issue de B. H, point d'intersection de ces deux hauteurs, est donc l'orthocentre du triangle ABC[2].

---

[2]Pour votre culture générale, sachez que pour un triangle ABC quelconque, les calculs, bien qu'un peu plus compliqués, se font sans artifice particulier, et donnent :

$$\omega = \frac{a\overline{a}(b-c) + b\overline{b}(c-a) + c\overline{c}(a-b)}{2\mathrm{Im}\left(\overline{b}c + \overline{c}a + \overline{a}b\right)} \quad \text{et} \quad h = \frac{(c-a)\,\mathrm{Re}\left(a\overline{c} - a\overline{b}\right) - (c-b)\,\mathrm{Re}\left(b\overline{c} - b\overline{a}\right)}{\mathrm{Im}\left(b\overline{c} + c\overline{a} + a\overline{b}\right)}$$

ω étant l'affixe du centre du cercle circonscrit (vous pouvez vérifier que celui-ci est nul si $|a| = |b| = |c|$). L'une de ces relations suffit d'ailleurs à obtenir l'autre, Ω, H et G (centre de gravité) étant liés par la *relation d'Euler* : $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$. L'affixe du centre de gravité, quant-à lui, se trouve sans peine grâce à la théorie des barycentres : c'est $g = \dfrac{a+b+c}{3}$.

Exercice 3 : étude de deux suites récurrentes

1) f est dérivable sur $[0;2]$, en tant que fonction rationnelle, et $f'(x) = \dfrac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

   f' est donc strictement positive sur $[0;2]$, f y est donc strictement croissante.

   f réalise donc une bijection de $[0;2]$ sur son ensemble image $[f(0); f(2)]$, soit $[1;2]$.

2) (a) Sur le graphique en question, il semble que (u_n) soit strictement croissante, (v_n) strictement décroissante, ces deux suites semblant converger vers une limite commune qui est l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f avec la droite d'équation $y = x$.

   (b)
   - On a $v_0 = 2 \in [1;2]$. Supposons que $v_n \in [1;2]$ pour un certain n. Alors, $v_{n+1} = f(v_n) \in [1;2]$ puisque l'image de l'intervalle $[0;2]$ par f est $[1;2]$.
     Ainsi, par le principe de récurrence, $v_n \in [1;2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - $v_1 = f(v_0) = \dfrac{5}{3} < 2 = v_0$. Supposons que pour un certain n, $v_n > v_{n+1}$. Alors, par croissance de f sur $[0;2]$, $f(v_n) > f(v_{n+1})$, soit $v_{n+1} > v_{n+2}$.
     Ainsi, encore une fois par le principe de récurrence, $v_n > v_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui se traduit par le fait que (v_n) est *strictement décroissante*.

   On montre de la même façon que $u_n \in [1;2]$ pour tout n, et que (u_n) est *strictement croissante*.

   On peut déjà conclure à ce stade que les deux suites (u_n) et (v_n), monotones et bornées, sont *convergentes*.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} - u_{n+1} = f(v_n) - f(u_n) = \frac{2v_n+1}{v_n+1} - \frac{2u_n+1}{u_n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

   Comme u_n et v_n sont tous deux supérieurs à 1, on déduit de ceci que $v_{n+1} - u_{n+1}$ est du même signe que $v_n - u_n$, et donc par récurrence du même signe que $v_0 - u_0$, donc positif. Ainsi, $v_n > u_n$ pour tout entier n.

   D'autre part, toujours grâce au fait que (u_n) et (v_n) sont minorées par 1, $(v_n+1)(u_n+1) > 2 \times 2 = 4$. Ainsi : $v_{n+1} - u_{n+1} < \dfrac{1}{4}(v_n + u_n)$.

   (d) Par récurrence : $v_0 - u_0 = 1 \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^0$. Supposons que $v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour un certain n. Alors :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(v_n - u_n) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

   (e) (u_n) est croissante, (v_n) décroissante, $v_n \geqslant u_n$ pour tout n. Enfin,

$$0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

   donc $\lim\limits_{n\to\infty} v_n - u_n = 0$. Les suites (u_n) et (v_n) sont donc *adjacentes*, et convergent donc toutes les deux, vers une même limite α.

   Pour trouver cette limite commune α, on "passe à la limite" dans les expressions $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_{n+1} = f(v_n)$. f étant continue sur $[0;2]$, elle l'est en α. De $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \alpha$, on déduit donc : $\alpha = f(\alpha)$.

   α est donc un *point fixe* de f, et il appartient à l'intervalle $[0;2]$. Résolvons donc l'équation $x = f(x)$:

$$x = f(x) \iff x = \frac{2x+1}{x+1} \iff x(x+1) = 2x+1 \iff x^2 - x - 1 = 0$$

Cette équation du second degré a deux racines réelles, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, mais seule la première appartient au bon intervalle.

On a donc :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Les curieux auront reconnu une fois de plus le célèbre “nombre d’or”.