Devoir surveillé n°7 :

Exercice 1 : calculs d'intégrales

On considère les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$$

1) (a) Quelle est la dérivée de la fonction tangente ?
   (b) Calculer I.

2) (a) Soit la fonction $f : \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$.
   Démontrer que f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et que, pour tout x appartenant à cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$$

   (b) Déduire du calcul précédent une relation entre I et J, puis calculer J.

Exercice 2 : complexes et géométrie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4cm).
Soit A le point d'affixe $z_A = i$ et B le point d'affixe $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r.
   (a) Déterminer une écriture complexe de r.
   (b) Montrer que l'affixe de C est $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
   (c) Écrire z_B et z_C sous forme algébrique.
   (d) Placer les points A, B et C.

2) Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, -1 et 2.
   (a) Montrer que l'affixe de D est $z_D = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$. Placer le point D.
   (b) Montrer que A, B, C et D sont sur un même cercle.

3) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h.
   (a) Déterminer une écriture complexe de h.
   (b) Montrer que l'affixe de E est $z_E = \sqrt{3}$. Placer le point E.

4) (a) Calculer le rapport $\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.
   (b) En déduire la nature du triangle CDE.

Exercice 3 : une expression numérique de e^2

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.
On définit, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}\,(2-x)^n\,e^x\,\mathrm{d}x$$

1) Calculer I_1.

2) Établir que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{2^n}{n!}\left(e^2-1\right)$.

3) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

4) Démontrer par récurrence que $e^2 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \cdots + \dfrac{2^n}{n!} + I_n$.

5) On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

   (a) Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}u_n$.

   (b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$.

6) En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n).

7) Justifier enfin que :

$$e^2 = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right)$$