Corrigé du devoir surveillé n°7

Exercice 1 : calculs d'intégrales

1) (a) tan est dérivable sur $[0;\pi/4]$, et sa dérivée est $x \mapsto 1+\tan^2 x$, ce qui nous arrange assez peu, ou $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$, ce qui semble beaucoup plus intéressant.

(b) D'après ce qui précède, tan est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$ sur $[0;\pi/4]$, donc :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$$

2) (a) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ est dérivable sur $[0;\pi/4]$ en tant que quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x \cos^3 x - \sin x\left(-3\sin x \cos^2 x\right)}{\cos^6 x} = \frac{\cos^4 x + 3\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x}{\cos^6 x} \\ &= \frac{3\cos^2 x - 2\cos^4 x}{\cos^6 x} = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

(b) Intégrons la relation précédente entre 0 et $\dfrac{\pi}{4}$, en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi/4} f'(x)\,\mathrm{d}x = 3\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} - 2\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = 3J - 2I$$

On a donc, en vertu du fait qu'une primitive de f' sur $[0;\pi/4]$ est ... f, bien-sûr :

$$3J - 2I = \left[\frac{\sin x}{\cos^3 x}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}/2}{\left(\sqrt{2}/2\right)^3} - \frac{0}{1^3} = 2$$

Ainsi :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} = \frac{1}{3}(2+2I) = \frac{4}{3}$$

Exercice 2 : complexes et géométrie

1) (a) L'écriture complexe de r est $r(z) = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$.

(b) On a donc :

$$z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{-i\frac{5\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

(c) On a :

$$z_B = 1 \times \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

$$\text{et} \quad z_C = 1 \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

(d) Voir la figure à la fin de l'énoncé.

2) (a) D'après le cours, l'affixe de D est :

$$z_D = \frac{1}{2-1+2}\left(2z_A - z_B + 2z_C\right) = \frac{1}{3}\left(2i + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} + \sqrt{3} - i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

(b) $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 1$, donc A, B, C et D sont sur le cercle de centre O et de rayon 1.

3) (a) D'après le cours, on a : $h(z) - z_A = 2(z - z_A)$, soit : $h(z) = i + 2(z - i) = 2z - i$.

(b) E, image[1] de D par l'homothétie h, a pour affixe :

$$z_E = 2z_D - i = \sqrt{3} + i - i = \sqrt{3}$$

4) (a) On a :

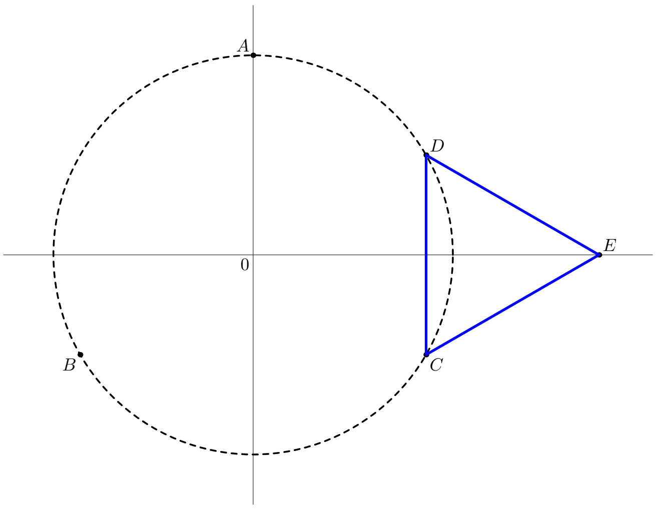
$$\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

(b) On a d'une part

$$\left|\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$$

donc $|z_D - z_C| = |z_E - z_C|$, i.e. $CD = CE$. CDE est donc isocèle en C.

D'autre part, $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$, donc l'angle $\widehat{DCE}$ a pour mesure $\frac{\pi}{3}$. CDE est donc un *triangle équilatéral*.



Exercice 3 : une expression numérique de e^2

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2 - x)^n e^x \,\mathrm{d}x$$

1) Pour calculer I_1, il faut trouver une primitive de $x \mapsto (2 - x)e^x$. Pour cela, intégrons par parties :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{1!}\int_0^2 (2 - x)^n e^x \,\mathrm{d}x = \left[(2 - x)e^x\right]_0^2 + \int_0^2 e^x \,\mathrm{d}x \\ &= -2 + \left[e^x\right]_0^2 = e^2 - 3 \end{aligned}$$

2) On voit que, pour tout $x \in [0;2]$, $0 \leqslant 2 - x \leqslant 2$, donc, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant (2 - x)^n \leqslant 2^n$. En multipliant par $\frac{e^x}{n!}$ (positif), et en intégrant entre 0 et 2, on obtient :

$$0 = \int_0^2 0 \,\mathrm{d}x \leqslant I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2 - x)^n e^x \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 \frac{1}{n!}2^n e^x \,\mathrm{d}x = \frac{2^n}{n!}\left[e^x\right]_0^2 = \frac{2^n}{n!}\left(e^2 - 1\right)$$

3) L'intégration par parties devrait fonctionner de la même façon ici :

$$I_{n+1} = \int_0^2 \frac{1}{(n+1)!}(2 - x)^{n+1} e^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)!}\left[(2 - x)^{n+1} e^x\right]_0^2 + \frac{n+1}{(n+1)!}\int_0^2 \frac{1}{n!}(2 - x)^n e^x \,\mathrm{d}x = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

[1] ce qui avait été oublié dans l'énoncé, j'espère que cela ne vous a pas trop gêné !

4) On a vu que $I_1 = e^2 - 3$, ce qui peut s'écrire $e^2 = 1 + \dfrac{2^1}{1!} + I_1$.

Supposons que $e^2 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \cdots + \dfrac{2^n}{n!} + I_n$ pour un certain entier n. On a vu dans la question précédente que $I_{n+1} = I_n - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$, d'où :

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

5) On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

(a) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \dfrac{2^{n+1} n!}{2^n\,(n+1)!} = \dfrac{2}{n+1}$.

Si $n \geqslant 3$, on a donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{n+1} \leqslant \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

(b) On a $u_3 \leqslant u_3 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3-3}$. La relation est donc vraie pour $n = 3$.

Supposons la vraie pour un certain $n \geqslant 3$. On a alors : $u_{n+1} \leqslant u_n \dfrac{1}{2} \leqslant u_3 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3} \times \dfrac{1}{2}$, et la relation est encore vraie pour $n+1$. Le principe de récurrence s'occupe du reste.

6) On a, pour tout $n \geqslant 3$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_3 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$. Les deux extrémités de cet encadrement ont pour limite 0 lorsque n tend vers l'infini. On en déduit que (u_n) converge, et que sa limite est 0.

De $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{2^n}{n!}\left(e^2 - 1\right) = \left(e^2 - 1\right) u_n$, on déduit alors que (I_n) a aussi pour limite 0.

7) On a donc :

$$1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} = e^2 - I_n$$

et au vu de $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$, on a bien :

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} = e^2$$

ce qui fournit un moyen numérique de calculer e^2, moyen qui est d'ailleurs utilisé dans les calculatrices et les ordinateurs.