Correction du TD 2 p.97 : encadrements de e, irrationalité de e

Partie 1 : premier encadrement

1) (a) $f : x \mapsto e^x - (1+x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est donnée par $f'(x) = e^x - 1$, son signe se déduit immédiatement du tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On déduit de ce tableau que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$, ce qui peut se lire[1] : (1) : $e^x \geqslant x+1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Il s'agit juste, dans cette question, d'éviter le piège concernant le signe des quantités que l'on va comparer. De (1), on déduit en remplaçant x par $-x$: $e^{-x} \geqslant 1-x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Mais pour appliquer la fonction inverse à cette inégalité, il faut que ses deux membres soient de même signe, ce qui restreint les valeurs de x à l'intervalle $]-\infty; 1[$.

On obtient, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{*+}$: (2) : $e^x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

2) (a) En posant $x = \dfrac{1}{n}$ dans (1) est en élevant à la puissance n ($x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$), on obtient :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(e^{1/n}\right)^n = e^1 = e$$

(b) De même, en posant $x = \dfrac{1}{n+1}$ dans la deuxième inégalité et en élevant à la puissance $n+1$, on obtient :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{\frac{n}{n+1}}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \geqslant \left(e^{1/(n+1)}\right)^{n+1} = e$$

Finalement, on obtient l'encadrement : $\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$, valable pour tout $n \geqslant 1$.

Partie 2 : un deuxième encadrement de e

1) (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[0,1]$, comme produit de $x \mapsto e^{-x}$ (composée de fonctions dérivables) et d'une fonction polynôme. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(-e^{-x}\right)\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right] + e^{-x}\left[0+\frac{1}{1!}+\frac{2x}{2!}+\cdots+\frac{nx^{n-1}}{n!}\right] \\ &= \left(-e^{-x}\right)\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right] + e^{-x}\left[1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right] \\ &= -e^{-x}\frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Ainsi, $g'(x) < 0$ pour tout $x \in]0,1]$, et g est strictement décroissante sur $[0,1]$.

On a $h(x) = g(x) + e^{-x}\dfrac{x^n}{n!}$, donc

$$h'(x) = g'(x) + \left(-e^{-x}\right)\frac{x^n}{n!} + e^{-x}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^{-x}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - 2e^{-x}\frac{x^n}{n!} = \frac{e^{-x}x^{n-1}}{n!}(n-2x)$$

et donc $h'(x) > 0$ pour tout $x \in]0,1]$, ce dont on déduit que h est strictement croissante sur $[0,1]$.

[1] et s'interpréter graphiquement en disant que la courbe de la fonction exponentielle reste au dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, d'équation $y = x+1$.

(b) g est strictement décroissante sur $[0,1]$, $g(0)=1$, donc $g(x)<x$ pour tout $x\in]0,1]$. En particulier, $g(1)<1$.

De même, h est strictement croissante sur $[0,1]$, $h(0)=1$, donc $h(1)>1$.

(c) De $g(1)<1$, on en déduit :

$$e^{-1}\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right]<1 \iff 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<e$$

De même, de $h(1)>1$, on déduit

$$e<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!}$$

d'où l'encadrement souhaité :

$$\boxed{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<e<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!}}$$

encadrement bigrement efficace puisque les termes de rang 16 des deux bornes donnent une valeur approchée de e à 13 décimales exactes.

Partie 3 : irrationalité de e

Utilisons ce qui précède pour obtenir une résultat algébrique sur le nombre e : supposons que celui-ci soit un rationnel, et qu'il soit donc égal à la fraction réduite[2] $\frac{p}{q}$.

1) L'inégalité précédente devient, en la multipliant par $n!$:

$$n!+\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}+\cdots+\frac{n!}{n!}<n!e<n!+\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}+\cdots+\frac{n!}{n!}+\frac{n!}{n!}$$

soit, en notant $a_n=n!+\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}+\cdots+\frac{n!}{n!}$:

$$a_n<en!<a_n+1$$

a_n étant un entier puisque tous les quotients $\frac{n!}{k!}$ étant entiers[3] pour k entier inférieur à n.

2) Si $q<n$, q est un diviseur de $n!$ (q est alors l'un des entiers entrant dans l'écriture du produit $n! = 1\times 2\times\cdots\times n$), donc $n!e=n!\frac{p}{q}$ est entier.

Mais ceci est impossible puisque d'après ce qui précède, $n!e$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs.

3) Ainsi, le dénominateur de notre fraction $\frac{p}{q}$ doit être supérieur à n. Mais comme nous n'avons pas fait d'hypothèse sur n, celui-ci peut être choisi arbitrairement grand, donc q devrait être supérieur à tout entier fixé à l'avance, ce qui est clairement impossible.

Ainsi, notre hypothèse initiale, à savoir le fait que e soit rationnel, est fausse, et e est *irrationnel*[4]

[2] Le fait que la fraction soit réduite ne jouera pas de rôle dans ce qui suit.

[3] Plus précisément, $\frac{n!}{k!}$ est le produit des entiers de $k+1$ jusqu'à n.

[4] En fait, on sait même mieux que cela : on a démontré que e est *transcendant*, i.e. qu'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers. Cela range le nombre e dans la même catégorie que par exemple le nombre π. Nous verrons plus tard une formule fondamentale liant ces deux nombres à un troisième, le nombre i.