Application géométrique de l'argument.
Forme exponentielle des complexes

1) **Utilisation de l'argument en géométrie**

On considère trois points A, B et C du plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'affixes respectifs a, b et c.

(a) Que nous apprend la forme trigonométrique du quotient $\dfrac{b-a}{c-a}$?

(b)
- Que peut-on dire si le quotient $\dfrac{b-a}{c-a}$ est réel non nul ?
- Que peut-on dire des points $A\,(2i)$, $B\,(1+i)$ et $C\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)$?
- Donner une équation (en z, affixe de M) de la droite passant par les points A et B.

(c)
- Que peut-on dire si $\dfrac{b-a}{c-a}$ est imaginaire pur ?
- Que peut-on dire des droites (AB) et (AC), avec $A\left(\frac{17}{5}+\frac{1}{5}i\right)$, $B\,(1+i)$ et $C\,(3-i)$?
- Donner une équation de la perpendiculaire à (AB) passant par C.

(d)
- Que peut-on déduire du fait que $\dfrac{b-a}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$?
- On donne $A\,(i)$ et $B\,(1+i)$. Trouver les affixes des points C et C' tels que les triangles ABC et ABC' soient équilatéraux.

2) **Une nouvelle notation**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On choisit de noter $e^{i\theta}$ le nombre complexe de module 1 de forme trigonométrique $1\,(\cos\theta + i\sin\theta)$.

(a)
   i. Calculer $e^{i(\theta+\theta')}$, $e^{-i\theta}$ et $e^{i(\theta-\theta')}$ en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{i\theta'}$.
   ii. Exprimer $e^{in\theta}$ en fonction de $e^{i\theta}$, d'abord pour $n \in \mathbb{N}$, puis pour $n \in \mathbb{Z}$. Cette relation s'appelle la *formule de Moivre*.
   iii. Donner les formes trigonométriques de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. En déduire $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Ces relations s'appellent les *formules d'Euler*.

(b)
   i. En calculant de deux façons différentes $e^{2i\theta}$, retrouver les formules de duplication donnant $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
   ii. De même, exprimer $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$. En déduire que $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.
   iii. Montrer que les solutions de l'équation $8x^3 - 6x - 1 = 0$ sont $\cos\dfrac{\pi}{9}$, $\cos\dfrac{7\pi}{9}$ et $\cos\dfrac{13\pi}{9}$.
   iv. *(Facultatif)* Essayer de trouver une relation générale donnant $\cos n\theta$ comme polynôme en $\cos\theta$. Trouver une formule similaire pour $\sin n\theta$.

(c) À l'aide des relations d'Euler, retrouver les relations

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

(d) En procédant de la même façon, démontrer que : $\sin^3\theta = \dfrac{1}{4}\,(3\sin\theta - \sin 3\theta)$.

En déduire une *primitive* de la fonction $g : x \mapsto \sin^3 x$ (i.e. une fonction f dont la dérivée est g), et trouver celle qui prend la valeur 1 en π.