Deux exercices de géométrie dans l'espace

Perpendiculaire commune, distance entre deux droites

L'espace est muni d'un repère orthonormal. Soit les deux droites (d) passant par $A\,(1;2;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1;2;0)$, et (δ) passant par $B\,(0;1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\,(0;1;1)$.

1) Vérifier que (d) et (δ) ne sont pas coplanaires.
2) (a) Déterminer un vecteur $\vec{n}$ tel que $\vec{n}.\vec{u} = \vec{n}.\vec{v} = 0$.
   (b) Soit (P) le plan contenant le point A et les points C et D définis par $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{n}$, déterminer une équation cartésienne de (P).
3) Soit E le point d'intersection de (P) et (δ), calculer les coordonnées de E.
4) (a) Soit (Δ) la droite passant par E et de vecteur directeur $\vec{n}$, donner un système d'équations paramétriques de (Δ).
   (b) Vérifier que (Δ) est orthogonale à (d) et (δ).
   (c) Montrer que (Δ) et (d) se coupent en un point F dont on déterminera les coordonnées. (Δ) est donc **la perpendiculaire commune** à (d) et (δ).
5) (Δ) est orthogonale à (d) et (δ), elle coupe (d) en F et (δ) en E. Calculer la distance EF, c'est-à-dire la **distance entre** (d) **et** (δ).

Bac France 2003

Soit a un réel strictement positif, et $OABC$ un tétraèdre tel que :

- OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O,
- $OA = OB = OC = a$.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC et D le point de l'espace défini par $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.

1) Quelle est la nature du triangle ABC ?
2) Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3) **Calcul de OH**

   (a) Calculer le volume $\mathscr{V}$ du tétraèdre $OABC$, puis l'aire $\mathscr{S}$ du triangle ABC.

   (b) Exprimer OH en fonction de $\mathscr{V}$ et $\mathscr{S}$, en déduire que $OH = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
4) **Étude du tétraèdre $ABCD$**

   L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O; \frac{1}{a}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OC}\right)$.

   (a) Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$.
   (b) Démontrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).
   (c) Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH), puis calculer ses coordonnées.