

Interrogation n°2 : récurrence, conditionnement

Cours (4 points)

- 1) Donner la définition de $P_A(B)$.
- 2) Donner les trois conditions équivalentes permettant d'affirmer que deux événements sont indépendants, et démontrer leur équivalence.
- 3) Définir la notion de variables aléatoires indépendantes.

Vrai-Faux (4 points)

- 1) Indiquer si les phrases suivantes sont vraies ou fausses, et justifier votre réponse.
 - (a) Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.
 - (b) Deux événements indépendants sont incompatibles.
- 2) Le raisonnement suivant essaye de démontrer que n points quelconques du plan sont toujours alignés ! Indiquer quelle étape de la démonstration ne fonctionne pas, et expliquer pourquoi.
 - (a) Soit, pour $n \geq 2$, la propriété $\mathcal{P}_n$: n points du plan sont toujours alignés.
 - (b) La propriété est vraie pour $n = 2$.
 - (c) Supposons que n points quelconques du plan soit toujours alignés.
 - (d) Soit $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ $n + 1$ points du plan.
 - (e) Par hypothèse de récurrence, $A_1, \dots, A_n$ sont alignés sur une droite que l'on notera D .
 - (f) De même, $A_2, \dots, A_{n+1}$ sont alignés sur une droite D' .
 - (g) $A_2, \dots, A_n$ étant communs aux deux droites D et D' , ces deux droites sont donc confondues.
 - (h) Ainsi, $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ sont encore alignés, et la propriété $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.
 - (i) Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

Exercice (12 points)

1) Exercice 1 (4 points)

Soit $u_1 = \frac{1}{1 \times 2}$, $u_2 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3}$, et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

- (a) Calculer sous forme de fraction irréductible u_1, u_2, u_3, u_4 et éventuellement u_5 . Que constate-t-on ?
- (b) Montrer cette conjecture par récurrence.
- (c) Retrouver ce résultat en constatant que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

2) Exercice 2 (3 points)

Pour démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \leq n^3$$

Martin a fait une jolie démonstration par récurrence.

- (a) Retrouver la démonstration de Martin.
- (b) Expliquer le commentaire de son professeur : "Correct, mais bien maladroit !".

3) Exercice 3 (5 points)

On place au hasard un jeton sur l'une des cases du damier 3×3 ci-contre. On désigne par X et Y les variables aléatoires indiquant respectivement les numéros de la ligne et de la colonne où se situe le jeton.

- (a) Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires réelles X et Y .
- (b) On définit la variable aléatoire M associant à chaque case la plus grande des valeurs prises par X et Y (on note $M = \max(X, Y)$; lorsque $X = Y$, on prend leur valeur commune).
 - i. Déterminer la loi de probabilité de M .
 - ii. Les variables aléatoires X et M sont-elles indépendantes ? Justifier votre réponse.
Et les variables aléatoires Y et M ?