Correction interrogation n°3 : fonction exponentielle

Cours (5 points)

On doit démontrer des propriétés de la fonction exp *à partir des seuls renseignements donnés par l'énoncé*, et non en utilisant des propriétés du cours ! Ici, on n'a le droit d'utiliser seulement le fait que exp est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle $y' = y$, vérifiant $y(0) = 1$.

1) Considérons f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(x)\exp(-x)$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de exp par la composée de exp par la fonction affine $x \mapsto -x$, et on a :

$$f'(x) = \exp'(x)\exp(-x) + \exp(x)(-\exp'(-x)) = \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$$

Ainsi, la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$. Comme de plus $f(0) = \exp(0)^2 = 1$, on en déduit que $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Deux conséquences : tout d'abord, $\exp(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car $\exp(x) = 0$ entraînerait $f(x) = 0$), et ensuite, puisqu'on peut diviser :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

2) Considérons maintenant la fonction g définie par $g(x) = \exp(x+y)\exp(-x)$. Encore une fois g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1.\exp'(x+y)\exp(-x) + \exp(x+y)(-\exp'(-x)) \\ &= \exp(x+y)\exp(-x) - \exp(x+y)\exp(-x) = 0 \end{aligned}$$

donc g est aussi constante sur $\mathbb{R}$. Comme $g(0) = \exp(y)$, on en déduit :

$$\text{pour tous } x \text{ et } y \text{ réels, } \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

En particulier, pour $y = x$:

$$\text{pour tout réel } x,\ \exp(2x) = (\exp(x))^2$$

3) Pour résoudre l'équation $e^{2x} + e^x - 2 = 0$, utilisons le fait que $e^{2x} = (e^x)^2$. Posons $X = e^x$. L'équation équivaut à :

$$\begin{cases} X = e^x \\ X^2 + X - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X = e^x \\ (X-1)(X+2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X = e^x \\ X = 1 \text{ ou } X = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} e^x = 1 \\ \text{ou} \\ e^x = -2 \end{cases}$$

Et puisque $e^x = -2$ n'a pas de solution (ce qui est une légère entorse à l'esprit "question de cours", ce point n'ayant pas été admis ou démontré dans la première partie), il ne reste que l'équation $e^x = 1$, dont la solution est $x = 0$.

Vrai-Faux (5 points)

Toujours le même principe dans le Vrai-Faux : on démontre *rapidement* ce qu'on pense vrai, et on trouve *rapidement* un contre-exemple lorsqu'on veut prouver qu'une phrase est fausse.

1) La droite d'équation $y = 1 - x$ ne peut être tangente en aucun point à la courbe représentative de la fonction exp. En effet, exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors que cette tangente a un coefficient directeur strictement négatif (rappelons que le coefficient directeur d'une tangente est le nombre dérivé de la fonction au point considéré, et que le signe de ce nombre dérivé a un lien avec le sens de variation local de la fonction considérée).

2) La fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ est impaire. En effet, elle est définie sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur est strictement positif), et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{e^{-x}(1 - e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -g(x)$$

3) Pour tout réel a, $e^a = \sqrt{e^{2a}}$. Mais il ne suffit pas pour cela d'élever au carré ! Il faut aussi signaler que $e^{2a} > 0$, donc qu'on a le droit d'en prendre la racine, et que $e^a > 0$.

   Alors seulement, on a le droit d'utiliser la propriété : deux nombres *de mêmes signes* ayant même carré sont égaux.

4) Soit donc u une fonction positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et f la fonction définie par $f(x) = u(x)\,e^x$. D'abord, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et ensuite :

$$f'(x) = u'(x)\,e^x + u(x)\,e^x = e^x\,(u'(x) + u(x))$$

   Or $e^x > 0$ pour tout réel x, et par hypothèse $u(x)$ et $u'(x)$ sont positif, u' ne s'annulant de plus sur aucun intervalle.

   On a donc $f'(x) \geqslant 0$ pour tout réel x, et $f'(x)$ ne s'annule sur aucun intervalle, donc f est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   On aurait pu plus simplement utiliser le théorème suivant : le produit de deux fonctions strictement croissantes est une fonction strictement croissante. Comment dites-vous ? C'est pas vrai ? Ben non c'est pas vrai, il faut ajouter l'hypothèse “et à valeurs positives” après “strictement croissantes”. Mais si on se souvient de la démonstration de ce théorème, on ne peut pas l'oublier !

   Au fait, vous vous en souvenez ?

Exercice (12 points)

1) **Exercice 1 (5 points)**

   Résoudre les équations et inéquations suivantes :

   (a) $\boxed{e^x + e^{-x} = 0}$

   Cette première équation ne peut avoir de solution, puisque son premier membre est strictement positif pour tout x réel.

   (b) $\boxed{e^{4x-1} = \frac{1}{e}}$

   Pour résoudre cette équation, il suffit d'en écrire les deux membres sous la forme d'exponentielles, et d'utiliser la stricte croissance de exp :

$$e^{4x-1} = \frac{1}{e} \iff e^{4x-1} = e^{-1} \iff 4x - 1 = -1 \iff 4x = 0 \iff x = 0$$

   (c) $\boxed{e^{x^2-4} = \left(e^{x+2}\right)^2}$

   Même principe pour cette équation, avec en plus $(e^a)^2 = e^{2a}$ (et pas e^{a^2} !) :

$$e^{x^2-4} = \left(e^{x+2}\right)^2 \iff e^{x^2-4} = e^{2x+4} \iff x^2 - 4 = 2x + 4 \iff x^2 - 2x - 8 = 0 \iff (x+4)(x-2) = 0$$

   Les deux solutions sont donc 2 et -4.

   (d) $\boxed{e^{2x} + 3e^x - 4 > 0}$

   On profite de l'indication en posant $X = e^x$, ce qui ramène l'inéquation à : $X^2 + 3X - 4 > 0$. 1 est racine évidente du trinôme, l'autre est donc[1] -4 (produit des racines).

   Ainsi, l'inéquation est encore équivalente à $(X+4)(X-1) > 0$. On sait que ceci n'est réalisé que lorsque X est à l'extérieur de l'intervalle des racines, soit $X < -4$ ou $X > 1$.

   L'inéquation de départ est donc équivalente à ($e^x < -4$ ou $e^x > 1$). Mais la première inéquation n'a pas de solution (toujours $e^x > 0$ pour tout x), et il ne reste que la deuxième condition : $e^x > 1 = e^0$, soit $x > 0$.

   L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc l'intervalle $]0; +\infty[$.

[1] Vous pourrez remarquer que j'ai eu plusieurs équations du second degré à résoudre, et que pas une seule fois je n'ai utilisé le discriminant. Lorsqu'on trouve une racine évidente,le plus simple est en effet de *factoriser* le trinôme !

2) **Exercice 2 (5 points)**

(a) Soit donc g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$. Cette fonction est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = e^x - 1$. On en déduit immédiatement son tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites sont indiquées dans le tableau, mais elles ne sont pas indispensables, leur calcul est laissé à votre curiosité.

On déduit de ce tableau que $g(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, $g(x)$, qui n'est autre que le dénominateur de la fraction définissant $f(x)$, est strictement positif, donc ne s'annule pas. f est donc définie sur $\mathbb{R}$.

(b) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x} = \dfrac{e^x}{e^x(1 - x/e^x)} = \dfrac{1}{1 - x/e^x}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$, d'où par le théorème sur la limite d'un quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

En particulier, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

En $-\infty$, c'est plus simple : le numérateur e^x a pour limite 0, le dénominateur $e^x - x$ pour limite $+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

On en déduit une deuxième asymptote horizontale, d'équation $y = 0$, en $-\infty$.

(c) f est quotient de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$f'(x) = \frac{e^x(x^x - x) - e^x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$$

$f'(x)$ est du signe de $1 - x$. Le tableau de variations de f est donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

(d) On termine par la courbe représentative de f, à laquelle on ajoute les deux asymptotes horizontales, ainsi que la tangente horizontale au point d'abscisse 1. On peut aussi rajouter, parce que ça ne coûte pas grand-chose, la tangente au point d'abscisse 0 : $f(0) = 1$, et $f'(0) = 1$, donc la tangente a pour équation $y = x + 1$.

Bon, on ne va pas non plus y passer la nuit. Voici la belle courbe, avec ses deux asymptotes et ses deux tangentes :