

Interrogation n°4 : continuité

Cours (4 points)

- 1) Citer le théorème sur la continuité d'une fonction composée.
- 2) Montrer que la fonction "racine carrée" est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Vrai-Faux (4 points)

Indiquer si les phrases suivantes sont vraies ou fausses, et justifier votre réponse.

- 1) Il existe une fonction continue en 0 mais non dérivable en 0.
- 2) Il existe une fonction dérivable en 0 mais non continue en 0.
- 3) Une bijection de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ est nécessairement continue sur $[0; 1]$.
- 4) Si f est strictement décroissante sur $[-1; 1]$ et vérifie $f(-1) = 5$ et $f(1) = -3$, il existe un unique $x \in [-1; 1]$ tel que $f(x) = 0$.

Exercice (12 points)

1) Exercice 1 (7 points)

Soit, pour $k \in \mathbb{R}$, la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = x^3 + kx - 1$.

- (a) Montrer que l'équation $f_k(x) = 0$ a, pour toute valeur de k , au moins une solution.
- (b) Montrer que si $k \geq 0$, l'équation $f(x) = -1$ a une unique solution. Quelle est-elle ?
- (c) Dans cette question, $k = -3$.
 - i. Montrer que l'équation $f_{-3}(x) = 1$ a exactement deux solutions. Trouver ces deux solutions.
 - ii. Selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$, discuter le nombre de solutions de l'équation $f_{-3}(x) = \lambda$.

2) Exercice 2 (5 points)

- (a) Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 6$. Montrer que l'équation $f(x + \frac{1}{2}) - f(x) = 3$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0; 1/2]$.
- (b) L'affirmation suivante est-elle juste :
« Si je parcours 6 km en une heure, il y a une plage d'une demi-heure pendant laquelle j'ai parcouru exactement 3 km. »

Interrogation n°4 : continuité

Cours (4 points)

- 1) Citer le théorème sur la continuité d'une fonction composée.
- 2) Montrer que la fonction "racine carrée" est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Vrai-Faux (4 points)

Indiquer si les phrases suivantes sont vraies ou fausses, et justifier votre réponse.

- 1) Il existe une fonction continue en 0 mais non dérivable en 0.
- 2) Il existe une fonction dérivable en 0 mais non continue en 0.
- 3) Une bijection de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ est nécessairement continue sur $[0; 1]$.
- 4) Si f est strictement décroissante sur $[-1; 1]$ et vérifie $f(-1) = 5$ et $f(1) = -3$, il existe un unique $x \in [-1; 1]$ tel que $f(x) = 0$.

Exercice (12 points)

1) Exercice 1 (7 points)

Soit, pour $k \in \mathbb{R}$, la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = x^3 + kx - 1$.

- (a) Montrer que l'équation $f_k(x) = 0$ a, pour toute valeur de k , au moins une solution.
- (b) Montrer que si $k \geq 0$, l'équation $f(x) = -1$ a une unique solution. Quelle est-elle ?
- (c) Dans cette question, $k = -3$.
 - i. Montrer que l'équation $f_{-3}(x) = 1$ a exactement deux solutions. Trouver ces deux solutions.
 - ii. Selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$, discuter le nombre de solutions de l'équation $f_{-3}(x) = \lambda$.

2) Exercice 2 (5 points)

- (a) Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 6$. Montrer que l'équation $f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x) = 3$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0; 1/2]$.
- (b) L'affirmation suivante est-elle juste :
« Si je parcours 6 km en une heure, il y a une plage d'une demi-heure pendant laquelle j'ai parcouru exactement 3 km. »