Interrogation n°5 : complexes

Cours (3 points)

1) Démontrer que pour tous complexes z et z', $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$.
   En déduire $|zz'| = |z|\,|z'|$.

2) Donner deux caractérisations de "z est imaginaire pur".

Vrai-Faux (4 points)

Indiquer si les phrases suivantes sont vraies ou fausses, et justifier votre réponse.

1) Si z est un nombre complexe non nul, $\dfrac{z^2 - \overline{z}^2}{z\overline{z} + 3}$ est imaginaire pur.

2) Pour tous complexes z et z', $|z + z'| = |z| + |z'|$.

3) $1 + i$ est solution de l'équation $z^2 + (1 - i)\,z - 2 - 2i = 0$.

4) Pour tout complexe non nul z, $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \dfrac{\mathrm{Re}\,(z)}{|z|^2}$.

Exercice (13 points)

1) **Exercice 1 (5 points)**

   Effectuer les calculs suivants, mettre les résultats sous forme algébrique :

   (a) $(1 - 3i)^2\,(-8 + 6i)$ (b) $\dfrac{2 - 5i}{3 + i}$ (c) $\overline{\left(\dfrac{i\,(2 - i)^3}{(-3 + i)}\right)}$

2) **Exercice 2 (5 points)**

   Résoudre les équations et systèmes suivants, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

   (a) $2z - (3 + i)\,\overline{z} = 4 + 2i$ (b) $\begin{cases} 2z - 3\overline{z} = -2 - 15i \\ z + 2\overline{z} = 6 + 3i \end{cases}$ (c) $z^4 + 3z^2 - 54 = 0$

3) **Exercice 3 (3 points)**

   À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = 2z^2 - 3iz$.

   (a) En posant $z = x + iy$, trouver les parties réelle et imaginaire de z'.
   (b) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que M' soit sur l'axe des abscisses (i.e. que z' soit réel).
   (c) *(facultatif)* En déduire aussi l'ensemble des points M du plan tels que M' soit sur l'axe des ordonnées.
   (d) *(pour les plus balaises qui s'ennuient)* L'application qui à M associe M' conserve-t-elle l'alignement ? le milieu ?

Interrogation n°5 : complexes

Cours (3 points)

1) Démontrer que pour tous complexes z et z', $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$.
   En déduire $|zz'| = |z|\,|z'|$.

2) Donner deux caractérisations de “z est imaginaire pur”.

Vrai-Faux (4 points)

Indiquer si les phrases suivantes sont vraies ou fausses, et justifier votre réponse.

1) Si z est un nombre complexe non nul, $\dfrac{z^2 - \overline{z}^2}{z\overline{z} + 3}$ est imaginaire pur.

2) Pour tous complexes z et z', $|z + z'| = |z| + |z'|$.

3) $1 + i$ est solution de l'équation $z^2 + (1 - i)\,z - 2 - 2i = 0$.

4) Pour tout complexe non nul z, $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \dfrac{\mathrm{Re}\,(z)}{|z|^2}$.

Exercice (13 points)

1) **Exercice 1 (5 points)**

   Effectuer les calculs suivants, mettre les résultats sous forme algébrique :

   (a) $(1 - 3i)^2\,(-8 + 6i)$ (b) $\dfrac{2 - 5i}{3 + i}$ (c) $\overline{\left(\dfrac{i\,(2 - i)^3}{(-3 + i)}\right)}$

2) **Exercice 2 (5 points)**

   Résoudre les équations et systèmes suivants, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

   (a) $2z - (3 + i)\,\overline{z} = 4 + 2i$ (b) $\begin{cases} 2z - 3\overline{z} = -2 - 15i \\ z + 2\overline{z} = 6 + 3i \end{cases}$ (c) $z^4 + 3z^2 - 54 = 0$

3) **Exercice 3 (3 points)**

   À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = 2z^2 - 3iz$.

   (a) En posant $z = x + iy$, trouver les parties réelle et imaginaire de z'.

   (b) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que M' soit sur l'axe des abscisses (i.e. que z' soit réel).

   (c) *(facultatif)* En déduire aussi l'ensemble des points M du plan tels que M' soit sur l'axe des ordonnées.

   (d) *(pour les plus balaises qui s'ennuient)* L'application qui à M associe M' conserve-t-elle l'alignement ? le milieu ?