Interrogation n°7 : produit scalaire

Cours (4 points)

1) Donner trois définitions du produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace.
2) Énoncer et démontrer le théorème relatif à la distance d'un point à une droite en repère orthonormé.

Vrai-Faux (3 points)

Indiquer si les phrases suivantes sont vraies ou fausses, et **justifier votre réponse**.

1) Si $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w}$, alors $\vec{v} = \vec{w}$.
2) Si le plan (P) a pour équation $ax + by + cz + d = 0$ dans un repère orthonormé, alors $\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ est la distance de l'origine à (P).
3) Le vecteur $\vec{n}\left(\sqrt{2}; 4; 1\right)$ est normal au plan (P) d'équation $x + 2\sqrt{2}y + \dfrac{\sqrt{2}}{2}z - 33 = 0$.

Exercices (13 points)

1) **Exercice 1 : triangle dans l'espace (3 points)**

   Soit les points $A(1;1;1)$, $B(2;0;-2)$ et $C(1;-2;2)$.

   (a) Montrer que le triangle ABC est rectangle.

   (b) Donner une mesure en radians à 10^{-2} près des trois angles de ce triangle.

2) **Exercice 2 : Ensembles de points (5 points)**

   On considère un triangle ABC (dans l'espace) de centre de gravité G. Pour chacune des équations suivantes, indiquer l'ensemble des points M de l'espace qui en sont solutions :

   (a) $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{AB} = 0$;

   (b) $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GM}.\overrightarrow{AC} = 0$;

   (c) $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| \leqslant 6$.

3) **Exercice 3 : tétraèdre régulier (5 points)**

   $ABCD$ est un tétraèdre régulier (i.e. dont toutes les arêtes sont de même longueur), d'arête a.

   (a) Exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}$.
   Que peut-on déduire du dernier calcul ?

   (b) Soient I, J, K, L les milieux respectifs de $[AB]$, $[AD]$, $[DC]$ et $[CB]$.
   Justifier que $IJKL$ est un parallélogramme. Que peut-on dire de plus ?