Interrogation n°8 : suites

Cours (5 points)

1) Citer les théorèmes relatifs à la convergence des suites géométriques.
2) Citer le théorème relatif à la convergence des suites adjacentes, *et le démontrer*, en supposant connu le théorème de convergence monotone (toute suite monotone et bornée converge).

Vrai-Faux (4 points)

Indiquer si les phrases suivantes sont vraies ou fausses, et **justifier votre réponse**.

1) Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, il existe au moins un entier n tel que $u_n < u_{n+1}$.
2) Si (u_n) est strictement croissante, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
3) Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$, et si f est définie aux alentours de l, $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(l)$.
4) Si (u_n) est bornée, alors (u_n) est convergente.

Exercices (12 points)

1) **Exercice 1 : suites adjacentes (6 points)**

   Soit (u_n) et (v_n) les deux suites définies par la donnée de u_0 et v_0 tels que $u_0 < v_0$, et les relations de récurrence :

   $$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$.
   (b) Montrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est géométrique. En donner la limite.
   (c) Montrer que (u_n) est croissante, et que (v_n) est décroissante.
   (d) En déduire que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   (e) Montrer que la suite (x_n) définie par $x_n = u_n + v_n$ est constante. En déduire la limite des deux suites (u_n) et (v_n).

2) **Exercice 2 : suite récurrente (6 points)**

   Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{12 + v_n}$.

   (a) Faire une figure permettant de visualiser les premiers termes de la suite.
   Quelles conjectures pouvez-vous tirer de l'observation de votre figure ?
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant v_n \leqslant 4$.
   (c) Montrer que (v_n) est croissante.
   (d) En déduire que (v_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

Interrogation n°8 : suites

Cours (5 points)

1) Citer les théorèmes relatifs à la convergence des suites géométriques.
2) Citer le théorème relatif à la convergence des suites adjacentes, *et le démontrer*, en supposant connu le théorème de convergence monotone (toute suite monotone et bornée converge).

Vrai-Faux (4 points)

Indiquer si les phrases suivantes sont vraies ou fausses, et **justifier votre réponse**.

1) Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, il existe au moins un entier n tel que $u_n < u_{n+1}$.
2) Si (u_n) est strictement croissante, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
3) Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$, et si f est définie aux alentours de l, $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(l)$.
4) Si (u_n) est bornée, alors (u_n) est convergente.

Exercices (12 points)

1) **Exercice 1 : suites adjacentes (6 points)**

   Soit (u_n) et (v_n) les deux suites définies par la donnée de u_0 et v_0 tels que $u_0 < v_0$, et les relations de récurrence :

   $$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$.
   (b) Montrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est géométrique. En donner la limite.
   (c) Montrer que (u_n) est croissante, et que (v_n) est décroissante.
   (d) En déduire que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   (e) Montrer que la suite (x_n) définie par $x_n = u_n + v_n$ est constante. En déduire la limite des deux suites (u_n) et (v_n).

2) **Exercice 2 : suite récurrente (6 points)**

   Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{12 + v_n}$.

   (a) Faire une figure permettant de visualiser les premiers termes de la suite.
   Quelles conjectures pouvez-vous tirer de l'observation de votre figure ?
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant v_n \leqslant 4$.
   (c) Montrer que (v_n) est croissante.
   (d) En déduire que (v_n) est convergente. Quelle est sa limite ?