# Interrogation n°8 : dérivation

## Cours (3 points)

1) Donner deux définitions équivalentes de la dérivabilité d'une fonction $f$ en un point $a$.
2) Donner la définition d'une primitive d'une fonction $f$ sur un intervalle $I$.

## Vrai-Faux (4 points)

Indiquer si les phrases suivantes sont vraies ou fausses, et **justifier votre réponse**.

1) Si $u$ et $v$ sont dérivables en $a$, alors $uv$ est dérivable en $a$.
2) Si ni $u$ ni $v$ ne sont dérivables en $a$, alors $uv$ n'est pas dérivable en $a$.
3) La dérivée d'une fonction paire sur un intervalle est une fonction impaire.
4) $x \mapsto \cos 2x$ et $x \mapsto 2\cos^2 x$ sont deux primitives d'une même fonction sur $\mathbb{R}$.

## Exercices (13 points)

1) **Exercice 1 : une fonction et sa courbe (6 points)**

   Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ si $x \neq 0$, et $g(0) = 0$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

   (a) Étudier la parité de $g$.
   (b) Montrer que $g$ est continue en 0.
   (c) La fonction $g$ est-elle dérivable en 0 ? Interpréter graphiquement.
   (d) Déterminer la limite de $g$ en $+\infty$. Interpréter graphiquement.
   (e) Étudier le sens de variation de $g$ sur $[0; +\infty[$.
   (f) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2) **Exercice 2 : des encadrements pour des suites (7 points)**

   **Partie A** :

   On définit sur $[0; \pi]$ les fonctions $f$, $g$ et $h$ par :

   $$f(x) = x - \sin x, \quad g(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x \quad \text{et} \quad h(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$$

   (a) Étudier le sens de variation de $f$ et en déduire son signe.
   (b) Reprendre la première question avec les fonctions $g$ et $h$.
   (c) En déduire que pour tout $x \in [0; \pi]$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.

   **Partie B** :

   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sin\dfrac{1}{n^2} + \sin\dfrac{2}{n^2} + \cdots + \sin\dfrac{n}{n^2}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}$.

   (a) Déduire de la première partie que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant v_n$.
   (b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \leqslant n^4$.

   En déduire, à l'aide de la première partie, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - \dfrac{1}{6n^2} \leqslant u_n$.

   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$. En déduire que la suite $(u_n)$ converge, et en donner la limite.

# Interrogation n°8 : dérivation

## Cours (3 points)

1) Donner deux définitions équivalentes de la dérivabilité d'une fonction $f$ en un point $a$.
2) Donner la définition d'une primitive d'une fonction $f$ sur un intervalle $I$.

## Vrai-Faux (4 points)

Indiquer si les phrases suivantes sont vraies ou fausses, et **justifier votre réponse**.

1) Si $u$ et $v$ sont dérivables en $a$, alors $uv$ est dérivable en $a$.
2) Si ni $u$ ni $v$ ne sont dérivables en $a$, alors $uv$ n'est pas dérivable en $a$.
3) La dérivée d'une fonction paire sur un intervalle est une fonction impaire.
4) $x \mapsto \cos 2x$ et $x \mapsto 2\cos^2 x$ sont deux primitives d'une même fonction sur $\mathbb{R}$.

## Exercices (13 points)

1) **Exercice 1 : une fonction et sa courbe (6 points)**

   Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ si $x \neq 0$, et $g(0) = 0$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

   (a) Étudier la parité de $g$.
   (b) Montrer que $g$ est continue en 0.
   (c) La fonction $g$ est-elle dérivable en 0 ? Interpréter graphiquement.
   (d) Déterminer la limite de $g$ en $+\infty$. Interpréter graphiquement.
   (e) Étudier le sens de variation de $g$ sur $[0; +\infty[$.
   (f) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2) **Exercice 2 : des encadrements pour des suites (7 points)**

   **Partie A** :

   On définit sur $[0; \pi]$ les fonctions $f$, $g$ et $h$ par :

   $$f(x) = x - \sin x, \quad g(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x \quad \text{et} \quad h(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$$

   (a) Étudier le sens de variation de $f$ et en déduire son signe.
   (b) Reprendre la première question avec les fonctions $g$ et $h$.
   (c) En déduire que pour tout $x \in [0; \pi]$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.

   **Partie B** :

   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sin \dfrac{1}{n^2} + \sin \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \sin \dfrac{n}{n^2}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}$.

   (a) Déduire de la première partie que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant v_n$.
   (b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \leqslant n^4$.
   En déduire, à l'aide de la première partie, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - \dfrac{1}{6n^2} \leqslant u_n$.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = \dfrac{1}{2}$. En déduire que la suite $(u_n)$ converge, et en donner la limite.