Limites de suites réelles

Définition 1 :

- *On dit qu'une suite* (u_n) converge *vers le réel* l *si tout intervalle ouvert non vide centré en* l *contient tous les termes de la suite* (u_n)*, sauf un nombre fini d'entre eux.*

  Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$*, il existe un entier* N *tel que* $|u_n - l| < \varepsilon$ *pour tout* $n \geqslant N$*.*

- *On dit que la suite* (u_n) diverge *vers* $+\infty$ *si tout intervalle de la forme* $[A; +\infty[$ *contient tous les termes de la suite* (u_n)*, sauf un nombre fini d'entre eux.*

  Autrement dit, pour tout $A \in \mathbb{R}$*, il existe un entier* N *tel que* $u_n > A$ *pour tout* $n \geqslant N$*.*

1) **Suites définies explicitement**

   (a) Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{n-1}{2n^2+1}$.

      i. Étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{2x^2+1}$. En particulier, trouver son sens de variation, et sa limite l en $+\infty$.
      Qu'en déduit-on à propos de la suite (u_n) ?

      ii. Pour les plus forts : soit $\varepsilon > 0$. Trouver un entier N tel que $|u_n - l| < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$.

   (b) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{n^2 + \sin n}{2n + \cos n}$.

      i. La suite (v_n) est-elle croissante ?

      ii. Montrer que (v_n) n'est pas majorée.

      iii. Montrer que (v_n) admet pour limite $+\infty$.

2) **Suite définie par une relation de récurrence**

   (a) Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et (u_n) une suite réelle. On suppose que (u_n) converge vers $l \in I$, et que f est continue en l. Que peut-on dire de la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$?

   (b) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

      i. Faire une figure montrant les premiers termes de la suite. Quelles conjectures peut-on émettre ?

      ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

      iii. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

      iv. On verra en cours un théorème permettant de déduire de ce qui précède que la suite (u_n) converge. Quelle est alors sa limite ?

   (c) Soit (u_n) toujours définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, mais cette fois-ci $u_0 = 3$. Reprendre l'étude précédente.

   (d) Soit (u_n) toujours définie par la même relation de récurrence, mais cette fois $u_0 = 2\cos\theta$, avec $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

      i. Montrer que pour tout réel x, $1 + \cos x = 2\cos^2 \dfrac{x}{2}$.

      ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\cos \dfrac{\theta}{2^2}$.

      iii. En déduire la limite de (u_n).