Bac blanc

Session 2009

Épreuve : Mathématiques

Série : Scientifique

enseignement obligatoire (coefficient : 7)

L'usage des calculatrices est autorisé, les documents sont interdits.

Durée de l'épreuve : 4 heures.

Le sujet comporte 5 pages.

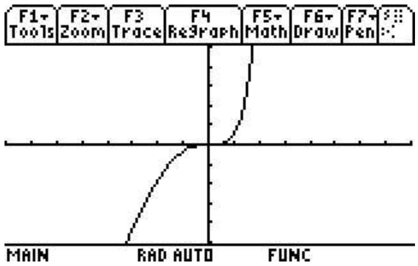
Les quatre exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans n'importe quel ordre, à condition que la présentation soit claire pour le correcteur. Tout résultat donné dans l'énoncé peut être utilisé même s'il n'a pas été démontré pour poursuivre l'exercice. Le soin apporté à la rédaction et à la présentation sera pris en compte dans la note finale.

Exercice 1 (6 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$$

Le graphique ci-après est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.



Conjectures

À l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant :

1) le sens de variation de f sur $[-3; 2]$?
2) la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$?

Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou d'infirmer ces conjectures et de les compléter.

Partie A - Contrôle de la première conjecture

1) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$, où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$$

2) **Étude du signe de $g(x)$ pour x réel**
   (a) Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ puis quand x tend vers $-\infty$.
   (b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x.
   (c) En déduire le sens de variation de la fonction g, puis dresser son tableau de variation.
   (d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$.
   On note α cette solution. Montrer que $0{,}20 < \alpha < 0{,}21$.
   (e) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3) **Sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$**
   (a) Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f.
   (c) Que pensez-vous de votre première conjecture ?

Partie B - Contrôle de la deuxième conjecture

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On se propose de contrôler la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$.

1) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

2) On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$h(x) = \frac{-x^3}{2(x+2)}$$

   (a) Calculer $h'(x)$ pour $x \in [0; 1]$, puis déterminer le sens de variation de h sur $[0; 1]$.

   (b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

3) (a) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe $(x'x)$ en deux points, l'un d'abscisses 0, l'autre d'abscisse $\beta > 0$, et donner une valeur approchée de β.

   (b) Préciser alors la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

   (c) Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?

Partie C - Tracé de la courbe

Compte tenu des résultats précédents, on se propose de tracer la partie Γ de $\mathscr{C}$ correspondant à l'intervalle $[-0{,}2; 0{,}4]$, dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, avec les unités suivantes :

sur l'axe $(x'x)$, 1cm représentera 0,05,

sur l'axe $(y'y)$, 1cm représentera 0,001.

1) Recopier le tableau suivant et compléter celui-ci à l'aide de la calculatrice en indiquant les valeurs approchées sous la forme $n.10^{-4}$ (n entier relatif).

x	$-0{,}20$	$-0{,}15$	$-0{,}10$	$-0{,}05$	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
$f(x)$													

2) Tracer alors Γ dans le repère choisi.

Exercice 2 (4 points)

1) On considère le polynôme P défini pour tout réel x par

$$P(x) = 3x^3 + 14x^2 + 19x + 8$$

   (a) Vérifier que, pour tout réel x, $P(x) = (x+1)\left(3x^2 + 11x + 8\right)$.

   (b) Écrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.

2) Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$S_n = \frac{2}{1\times 3} + \frac{2}{2\times 4} + \cdots + \frac{2}{n(n+2)}$$

Démontrer par récurrence que $S_n = \dfrac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}$.

3) (a) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul k,

$$\frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$$

   (b) En remarquant que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}$, et en utilisant le 3a, retrouver le résultat démontré en 2.

Exercice 3 (5 points)

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties.

La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2.

Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

1) On appelle :

   E_1, l'événement « le joueur perd la première partie » ;

   E_2, l'événement « le joueur perd la deuxième partie » ;

   E_3, l'événement « le joueur perd la troisième partie ».

   On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.

   On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

   (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

   (b) Montrer que la probabilité de l'événement $(X = 2)$ est égale à 0,031 et que celle de l'événement $(X = 3)$ est égale à 0,002.

   (c) Déterminer la loi de probabilité de X.

   (d) Calculer l'espérance de X.

2) Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement « le joueur perd la n-ième partie », $\overline{E_n}$ l'événement contraire, et on note p_n la probabilité de l'événement E_n.

   (a) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités des événements $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n.

   (b) En déduire que $p_{n+1} = 0{,}05p_n + 0,05$ pour tout entier naturel n non nul.

3) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - \dfrac{1}{19}$.

   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   (b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, u_n puis p_n en fonction de n.

   (c) Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 (5 points)

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Prérequis : *on rappelle les deux résultats suivants :*

- *si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :*

$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \iff \begin{cases} z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ r > 0 \end{cases}$$

- *pour tout nombres réels a et b,*

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{cases}$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.

Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \quad \text{et} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Partie B

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.

On rappelle que si z est un nombre complexe, $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et $|z|$ désigne le module de z.

1) Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, alors z^4 est un nombre réel.
2) Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.
3) Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.
4) Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.
5) Si $\left(1 + i\sqrt{3}\right) z \in i\mathbb{R}^*$, alors $\arg z = \frac{\pi}{6}$ à 2π près.