Corrigé du bac blanc TS 2008

Exercice 1

Conjectures

D'après la figure donnée sur le sujet, il semble que :

1) f est strictement croissante sur $[-3;2]$,
2) la courbe représentative de f est en dessous de l'axe $(x'x)$ sur $]-\infty,0[$, au dessus sur $]0,+\infty[$, et le traverse en $x=0$.

Partie A - Contrôle de la première conjecture

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2xe^{x-1} + x^2e^{x-1} - x = x\left[(x+2)e^{x-1} - 1\right] = xg(x)$$

2) **Étude du signe de $g(x)$ pour x réel**

(a) En $+\infty$, la limite se calcule simplement, $x+2$ et $e^{x-1} = \frac{1}{e}e^x$ tendant tous deux vers $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

Par contre, en $-\infty$, il y a une indétermination à lever :

$$g(x) = \frac{xe^x}{e} + \frac{2}{e}e^x - 1$$

Or on sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (théorème de croissance comparée), de même que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1$$

(b) De même, g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$g'(x) = e^{x-1}(1+x+2) = e^{x-1}(x+3)$$

Son signe est celui de $x+3$, positif si $x \geqslant 3$, négatif sinon.

(c) On déduit de ce qui précède le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-1-e^{-4}$	$\nearrow$	$+\infty$

(d) Le tableau de variations montre que g garde un signe strictement négatif sur $]-\infty;-3]$. Sur $[-3;+\infty[$, elle est continue (car dérivable), strictement croissante, et réalise donc une bijection de $[-3;+\infty[$ sur $[g(-3);+\infty[$. Comme 0 appartient à l'ensemble d'arrivée, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution sur cet intervalle. Notons α cette solution. La réalisation d'une table de valeur montre successivement que $0<\alpha<1$, puis $0{,}2<\alpha<0{,}3$, et enfin $0{,}20<\alpha<0{,}21$.

(e) On déduit du tableau de variations de g et de l'étude de l'équation $g(x)=0$ le tableau de signe de g :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3) **Sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$**

(a) Le tableau de signe de f se déduit simplement du fait que $f(x) = xg(x)$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

La seule limite pas tout à fait évidente est celle en $+\infty$:

$$f(x) = x^2\left(e^{x-1} - \frac{1}{2}\right)$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(c) La première conjecture est donc fausse. On a été trompé par le fait que le minimum de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$ est $f(\alpha) \approx 0{,}002$, impossible à distinguer de 0 pour l'échelle choisie.

Partie B - Contrôle de la deuxième conjecture

1) On a $g(\alpha) = 0$, donc $e^{\alpha-1} = \dfrac{1}{\alpha+2}$. Ainsi :

$$f(\alpha) = \alpha^2\left(e^{\alpha-1} - \frac{1}{2}\right) = \alpha^2\left(\frac{1}{\alpha+2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$$

2) (a) h, fonction rationnelle, est dérivable sur son ensemble de définition. On a donc, pour tout $x \in [0,1]$:

$$h'(x) = -\frac{1}{2}\frac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2} = -\frac{x^3+3x^2}{(x+2)^2} = -\frac{x^2(x+3)}{(x+2)^2}$$

Ainsi $h'(x) < 0$ pour $x \in]0;1]$, et h est strictement décroissante sur $[0,1]$.

(b) On a d'après ce qui précède $0{,}20 < \alpha < 0{,}21$, et $f(\alpha) = h(\alpha)$, donc par décroissance de h :

$$-\frac{1}{550} = h\left(\tfrac{1}{5}\right) > h(\alpha) = f(\alpha) > h\left(\tfrac{21}{100}\right) = -\frac{9261}{4420000}$$

Plus sérieusement, on obtient $-0{,}0021 < f(\alpha) < -0{,}0018$.

3) (a) Les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe $(x'x)$ ont pour abscisses les solutions de l'équation $f(x) = 0$, soit :

$$x^2\left(e^{x-1} - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } e^{x-1} = \frac{1}{2}$$

Vous ne connaissez pas encore la solution exacte de la deuxième équation, qui est $\beta = 1 - \ln 2$, mais la connaissance des variations de la fonction exponentielle suffit à garantir son existence, son unicité, et à en trouver une valeur approchée : $\beta \approx 0{,}307$.

(b) Le tableau de signes de f est, d'après ce qui précède :

x	$-\infty$		0		β		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

La courbe $\mathscr{C}$ est donc en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]-\infty;\beta]$ tout en le rencontrant en 0 et en β, et au dessus sur l'intervalle $]\beta;+$
$infty[$.

(c) Pour les mêmes raisons que pour la première, la deuxième conjecture est donc fausse.

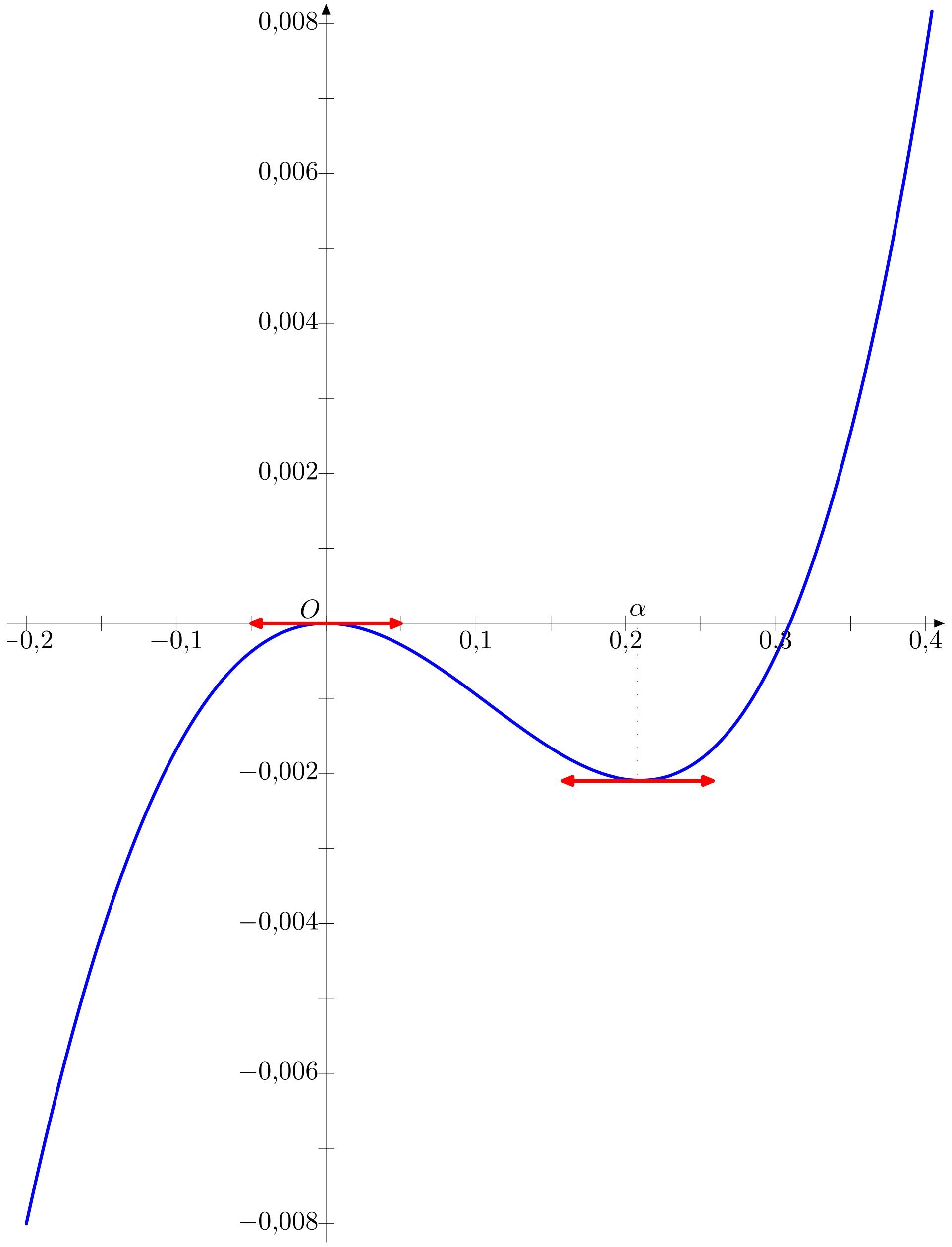
Partie C - Tracé de la courbe

1)

x	$-0{,}20$	$-0{,}15$	$-0{,}10$	$-0{,}05$	0	$0{,}05$	$0{,}10$
$f(x)$	-80.10^{-4}	-41.10^{-4}	-17.10^{-4}	-4.10^{-4}	0.10^{-4}	-3.10^{-4}	-9.10^{-4}

x	$0{,}15$	$0{,}20$	$0{,}25$	$0{,}30$	$0{,}35$	$0{,}40$
$f(x)$	-16.10^{-4}	-20.10^{-4}	-17.10^{-4}	-3.10^{-4}	-27.10^{-4}	-78.10^{-4}

2) Voici la courbe demandée :



Exercice 2

1) (a) Il suffit de redévelopper :

$$(x+1)\left(3x^2+11x+8\right) = 3x^3+14x^2+19x+8 = P(x)$$

(b) On factorise $3x^2+11x+8$, en constatant que -1 est encore racine. Le dernier facteur ne peut être que $3x+8$, et on vérifie facilement que ça marche. Ainsi :

$$P(x) = (x+1)\left(3x^2+11x+8\right) = (x+1)^2(3x+8)$$

2) Notons $S'_n = \dfrac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}$, et appelons $\mathscr{H}_n$ la phrase : $S_n = S'_n$.

- Vérifions que $\mathscr{H}_1$ est vraie :

$$S_1 = \frac{2}{1\times 3} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad S'_1 = \frac{1(3\times 1+5)}{2(1+1)(1+2)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

donc $\mathscr{H}_1$ est vraie.

- Supposons $\mathscr{H}_n$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, et démontrons que $\mathscr{H}_{n+1}$ est encore vraie :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + \frac{2}{(n+1)(n+3)} \underset{\mathscr{H}_n}{=} S'_n + \frac{2}{(n+1)(n+3)} \\
&= \frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)} + \frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{n(n+3)(3n+5)+4(n+1)(n+2)}{2(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{3n^3+14n^2+19n+8}{2(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{P(n)}{2(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{(n+1)^2(3n+8)}{2(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(3(n+1)+5)}{2(n+2)(n+3)} = S'_{n+1}
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{H}_{n+1}$ est encore vraie.

Ainsi, $\mathscr{H}_n$ est fondée et héréditaire, elle est donc, d'après le principe de récurrence, vraie pour tout entier n non nul.

3) (a) Une simple vérification :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} = \frac{k+2-k}{k(k+2)} = \frac{2}{k(k+2)}$$

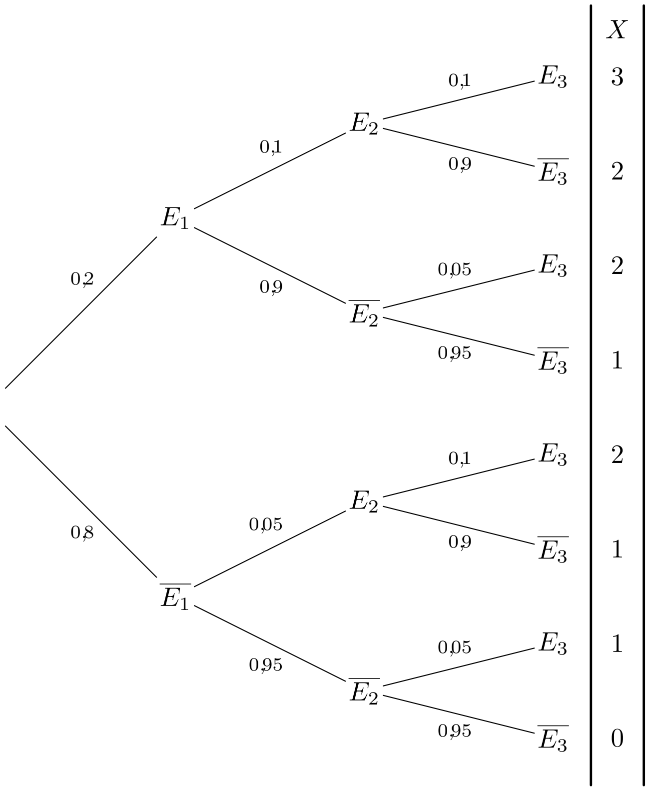
(b) La somme S_n va, à l'aide de la décomposition précédente, devenir *télescopique* :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\
&= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{2(n+1)(n+2)+(n+1)(n+2)-2(n+2)-2(n+1)}{2(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{3n^2+5n}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Exercice 3

1) (a) Le joueur peut perdre de 0 à 3 parties, donc les valeurs prises par X sont 0, 1, 2 et 3.

(b) Voici l'arbre se rapportant à cette expérience :



(c) Les calculs des probabilités de $(X = 2)$ et $(X = 3)$ sont :

$$P\,(X = 2) = 0{,}2 \times 0{,}1 \times 0{,}9 + 0{,}2 \times 0{,}9 \times 0{,}05 + 0{,}8 \times 0{,}05 \times 0{,}1$$
$$P\,(X = 3) = 0{,}2 \times 0{,}1 \times 0{,}1$$

(d) Sans détailler les calculs de $P\,(X = 0)$ et $P\,(X = 1)$, on obtient la loi de probabilité de X :

X	0	1	2	3
P	0,722	0,245	0,031	0,002

(e) L'espérance de X est :

$$E\,(X) = \sum_{k=0}^{3} k \times P\,(X = k) = 0 \times 0{,}722 + 1 \times 0{,}245 + 2 \times 0{,}031 + 3 \times 0{,}002 = 0{,}313$$

2) (a) On utilise les données de l'énoncé :

$$P_{E_n}\,(E_{n+1}) = 0{,}1 \quad \text{et} \quad P_{\overline{E_n}}\,(E_{n+1}) = 0{,}05$$

On a donc :

$$P\,(E_n \cap E_{n+1}) = P\,(E_n)\,.P_{E_n}\,(E_{n+1}) = 0{,}1p_n \quad \text{et} \quad P\left(\overline{E_n} \cap E_{n+1}\right) = 0{,}05\,(1 - p_n)$$

(b) En utilisant ce qui précède, qui n'est qu'une redémonstration de la loi des probabilités totales dans ce cas particulier, on obtient :

$$P\,(E_{n+1}) = P\,(E_n)\,.P_{E_n}\,(E_{n+1}) + P\left(\overline{E_n}\right).P_{\overline{E_n}}\,(E_{n+1}) = 0{,}1p_n + 0{,}05\,(1 - p_n) = 0{,}05p_n + 0,\,05$$

soit

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\;\; p_{n+1} = 0{,}05p_n + 0,\,05$$

3) (a) (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1}+\frac{1}{19}=0{,}05\left(u_n+\frac{1}{19}\right)+0,05 \iff u_{n+1}=0{,}05u_n+\frac{1}{19.20}-\frac{1}{19}=0{,}05u_n$$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison 0,05 et de premier terme $u_1=p_1-\frac{1}{19}=\frac{17}{38}$.

(b) Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=u_1.\left(\frac{1}{20}\right)^{n-1}$, et

$$p_n=u_n+\frac{1}{19}=\frac{17}{38}.\left(\frac{1}{20}\right)^{n-1}+\frac{1}{19}$$

(c) $\left|\frac{1}{20}\right|<1$, donc (u_n) a pour limite 0, et (p_n) a pour limite $\dfrac{1}{19}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 (enseignement obligatoire)

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Écrivons la forme trigonométrique des complexes z_1 et z_2 :

$$z_1=r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)\quad\text{et}\quad z_2=r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)$$

On a donc :

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)\\&=r_1r_2\left[\left(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\right)+i\left(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2\right)\right]\\&=r_1r_2\left(\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)\end{aligned}$$

avec $r_1r_2>0$. On en déduit que :

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1|\,|z_2|\quad\text{et}\quad\arg\left(z_1z_2\right)=\theta_1+\theta_2=\arg\left(z_1\right)+\arg\left(z_2\right)\ \text{à }2\pi\text{ près}$$

Partie B

1) L'écriture trigonométrique de z est :

$$z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

Ainsi, $\arg z=\dfrac{3\pi}{4}$ modulo 2π, et $\arg z^4=3\pi$ modulo 2π. z^4 est donc un réel, et même un réel strictement négatif.

2) $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}\left(z\right)$, donc $z+\overline{z}=0$ entraîne simplement z imaginaire pur, et non $z=0$.

3) Si z est non nul, l'équation $z+\dfrac{1}{z}=0$ équivaut à $z^2+1=0$, soit $z^2=-1$. Les deux solutions de cette équations sont bien $z=i$ et $z=-i$.

4) $|z|=1$ revient à dire que z appartient au cercle de centre O et de rayon 1, et $|z+z'|=1$ revient à dire que z' appartient au cercle de centre $-z'$ et de rayon 1. Cela fait beaucoup de z' ! Par exemple $z=1$ et $z'=i-1$ forment un contre-exemple.

5) Dire que $\left(1+i\sqrt{3}\right)z\in i\mathbb{R}^*$, revient à dire que l'argument de $\left(1+i\sqrt{3}\right)z$ est égal à 0 modulo π.

Or $1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, donc $\arg\left(1+i\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}$, d'où :

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)z\in i\mathbb{R}^*\iff\arg\left(\left(1+i\sqrt{3}\right)z\right)=0\ (\pi)\iff\arg\left(z\right)=-\frac{\pi}{3}\ (\pi)$$

Donc la réponse est non, $\arg\left(z\right)$ est bien égal à $-\frac{\pi}{3}$, amis à π près, et non à 2π près, subtile différence !

Exercice 4 (enseignement de spécialité)

Partie A

1) a^2 et b^2 sont de respectivement de même parités que a et b, donc $a^2 - b^2$ impair entraîne a^2 et b^2 de parités différentes.

2) Cela vient simplement de $N = (a - b)(a + b) = p.q$ avec $p = a - b$ et $q = a + b$ entiers naturels (car $a > b$.

3) a et b étant de parités différentes, p et q sont tous deux impairs. On peut aussi remarquer que N étant impair, il ne peut être que le produit de deux entiers impairs.

Partie B

1) (a) Les restes modulo 9 de X^2 sont :

X	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
X^2	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$

(b) $a^2 - 250507$ est le carré d'un entier b, donc ses restes possibles modulo 9 sont 0, 1, 4 ou 7.
Or $250\,507 = 27\,834 \times 9 + 1$, donc les restes possibles de a^2 sont 1, 2, 5 et 8. D'après le tableau précédent, le seul reste possible est 1.

(c) Dire que a^2 est congru à 1 modulo 9 revient à dire que a est congru à 1 ou 8 modulo 9.

2) Si $250507 = a^2 - b^2$, alors $a^2 = 250507 + b^2 \geqslant 250508$. Or $250508 > 500^2$, donc $a \geqslant 501$.
501 étant congru à 6 modulo 9, il n'existe pas de solution du type $(501; b)$.

3) (a) 503 est congru à 8 modulo 9, 505 à 1. Donc dire que a est congru à 1 ou 8 modulo 9 revient bien à dire que a est congru à 503 ou 505 modulo 9.

(b) Il s'agit de trouver k tel que $(505 + 9k)^2 - 250507$ est un carré. Or $505^2 - 250507$ n'est pas un carré, alors que $(505 + 9)^2 - 250507 = 117^2$. $k = 1$ et $b = 117$ conviennent :

$$\boxed{514^2 - 117^2 = 250507}$$

Partie C

1) On a donc : $250\,507 = 631 \times 397$.

2) Non seulement 397 et 631 sont premiers entre eux, mais ils sont carrément premiers !

3) $250\,507$ est donc produit de deux nombres premiers, l'écriture $250\,507 = 631 \times 397$ est donc la décomposition en produit de facteurs premiers, elle est unique (à l'ordre des facteurs près).