Quelques dénombrements

1) **Code d'accès**

L'entrée d'un immeuble est protégée par un code d'accès se composant de 4 symboles choisis parmi les deux lettres A et B et les dix chiffres de 0 à 9.

(a) Martin se présente à l'entrée de l'immeuble et il ignore le code. Quelle est la probabilité qu'en composant un code au hasard :

i. il ait tapé le bon code ?

ii. il ait tapé un code se composant des chiffres 1, 7, 8 et 9 ?

iii. il ait tapé un code comportant au moins un chiffre ?

(b) Adrien se présente à l'entrée et se souvient, lui, que le code commence par une lettre et contient trois chiffres distincts. Il compose au hasard un tel code. Calculer la probabilité :

i. qu'il ait tapé le bon code ;

ii. qu'il ait tapé un code commençant par A et se terminant par 9 ;

iii. qu'il ait tapé les quatre bons symboles mais dans un ordre érroné.

2) **Des chevaux et des probabilistes**

Dix chevaux (et leurs parasites, pardon leurs jockeys) participent à une course. À l'issue de cette course, les trois premiers forment un *podium* (en respectant l'ordre d'arrivée), et constitueront un *trio* sélectionné pour une finale. On s'intéresse au nombre p de podiums et au nombre t de trios possibles.

(a) A priori, y a-t-il plus de podiums ou de trios ?

(b) Trouver le nombre p.

(c) À partir d'un trio donné, déterminer le nombre de podiums possibles. En déduire une relation entre p et t, puis le nombre t.

(d) Refaire les calculs avec 15 chevaux à la place de 10.

(e) Refaire les calculs avec toujours 15 participants, mais cette fois-ci 4 sélectionnés.

3) **Pile ou face et formule du binôme**

(a) On lance plusieurs fois une pièce de monnaie équilibrée. On appelle X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de pile obtenus après n lancers, et on note $\binom{n}{k}$ la probabilité que X_n prenne la valeur k ($0 \leqslant k \leqslant n$).

i. Déterminer les lois de X_2, X_3 et X_4.

ii. Montrer que $\binom{n}{k}$ vérifie la relation suivante : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

iii. En déduire un procédé géométrique, appelé *triangle de Pascal*, permettant de calculer $\binom{n}{k}$.

iv. Trouver la loi de X_5, X_6 et X_7.

(b) On veut développer le *binôme* $(a+b)^n$.

i. Développer $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ et $(a+b)^4$.

ii. Montrer que dans le développement de $(a+b)^n$, on obtient une somme de termes de la forme $C_n^p a^p b^{n-p}$.

iii. Montrer que C_n^p vérifie la relation $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$. En déduire que $C_n^p = \binom{n}{p}$.

iv. En déduire une formule, appelée *formule du binôme*, donnant le développement de $(a+b)^n$.

v. Montrer, par récurrence, que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

vi. Montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.