Cours de mathématiques de terminale S

Nicolas FRANCOIS
nicolas.francois@free.fr

16 décembre 2008

Table des matières

I Le plan complexe et les nombres complexes **7**

I L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes . . . 8

A Définitions . . . 8

B Addition et multiplication des complexes . . . 9

C Le plan complexe . . . 9

II Conjugaison, module, division . . . 10

A Définitions, premières conséquences . . . 10

B Division . . . 10

C Opérations et conjugaison . . . 10

III Équation du second degré à coefficients réels . . . 11

II Comportement asymptotique des fonctions **13**

I Un petit "décrassage" de rentrée : limites de fonctions . . . 14

II Définitions . . . 14

A Limite finie en $+\infty$ . . . 14

B Limite $+\infty$ en $+\infty$ . . . 15

C Limite $+\infty$ en $a \in \mathbb{R}$ . . . 15

D Limite finie en $a \in \mathbb{R}$ . . . 16

III Théorèmes sur les limites . . . 16

A Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient . . . 16

B Limites en $\pm\infty$ d'une fonction polynôme ou rationnelle . . . 17

C Théorème de comparaison . . . 18

D Limite d'une fonction composée . . . 19

E Deux limites particulières . . . 20

IV Asymptotes . . . 20

A Asymptotes horizontales ou verticales . . . 20

B Asymptotes obliques . . . 20

C Complément : courbes asymptotes . . . 20

III Le raisonnement par récurrence **23**

I Principe du raisonnement par récurrence . . . 24

II Des exemples . . . 25

III Exercices . . . 26

IV Généralités sur les suites **27**

I Différents modes de définition d'une suite . . . 28

II Suites arithmétiques et géométriques . . . 28

III Diverses formes de représentations graphiques d'une suite . . . 30

A Représentation sur un axe . . . 30

B Représentation sous forme fonctionnelle . . . 30

C Représentation des suites définies par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . 30

V Combinatoire **33**

I Généralités . . . 34

A Définitions . . . 34

B Principes . . . 34

C Factorielle . . . 35

II Permutations, p-listes . . . 35

A Permutations d'un ensemble . . . 35

B p-listes . . . 36

III Combinaisons . . . 37

A Définition . . . 37

B Calcul de $\binom{n}{p}$ . . . 37

IV Propriétés des coefficients du binôme, formule du binôme de Newton . . . 38

A Quelques propriétés des $\dbinom{n}{p}$ . . . 38

B Formule du binôme de Newton . . . 40

VI La continuité et le théorème des valeurs intermédiaires **43**

I Continuité . . . 44

A Continuité en un point . . . 44

B Continuité sur un intervalle . . . 44

C Théorèmes relatifs à la continuité . . . 44

II Applications de la continuité . . . 46

A Le théorème des valeurs intermédiaires . . . 46

B Fonction continue strictement monotone sur un intervalle . . . 46

C Bijection . . . 47

VII Produit scalaire dans le plan et l'espace **49**

I Rappels sur le produit scalaire dans le plan . . . 50

A Définitions . . . 50

B Propriétés . . . 50

C Un complément : distance d'un point à une droite . . . 51

II Produit scalaire dans l'espace . . . 51

A Définition . . . 51

B Propriétés . . . 52

III Orthogonalité dans l'espace . . . 52

A Vecteurs orthogonaux . . . 52

B Vecteur normal à un plan . . . 53

IV Applications . . . 54
A Équations de plans . . . 54
B Distance d'un point à un plan . . . 54
C Plan médiateur . . . 55
D Équations de sphères . . . 55

VIII Dérivation, primitives d'une fonction **57**
I Rappels de première S . . . 58
II Compléments . . . 59
A Dérivation d'une fonction composée . . . 59
B Dérivées successives . . . 60
C Demi-tangentes, tangentes verticales . . . 61
III TP : étude de la fonction tangente . . . 62
IV Primitives d'une fonction . . . 63
A Définition . . . 63
B Calcul de primitives . . . 64

A Index **65**

CHAPITRE I

Le plan complexe et les nombres complexes

Sommaire

I L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes . . . 8

A Définitions . . . 8

B Addition et multiplication des complexes . . . 9

C Le plan complexe . . . 9

II Conjugaison, module, division . . . 10

A Définitions, premières conséquences . . . 10

B Division . . . 10

C Opérations et conjugaison . . . 10

III Équation du second degré à coefficients réels . . . 11

Au début du XVIème siècle, le mathématicien Scipione dal Ferro, propose une formule donnant une solution de l'équation du 3ème degré $x^3 + px = q$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}}$$

A la fin du XVIème siècle, le mathématicien Bombelli applique cette formule à l'équation $x^3 - 15x = 4$. Il obtient littéralement :

$$x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

Cette écriture n'a, *a priori*, pas de sens puisqu'on ne sait pas ce que représente le symbole noté $\sqrt{-1}$. Mais Bombelli va plus loin. Il remarque, en utilisant les règles usuelles de calcul que :

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

Si bien qu'il obtient finalement[1] :

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

Or, $x = 4$ est bien une solution de l'équation $x^3 - 15x = 4$. Une fois de plus, des calculs illicites menaient à un résultat juste. Une question naturelle s'est alors posée : peut-on légitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-dessus ? C'est ainsi qu'est née la théorie des nombres complexes...

Introduction

L'équation $x + 3 = 7$ a une solution dans $\mathbb{N}$. Par contre, pour trouver une solution à l'équation $x + 7 = 3$, il faut passer dans le domaine $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Continuant sur notre chemin, on invente facilement l'équation $3x + 1 = 0$, pour laquelle $\mathbb{Z}$ est insuffisant, il faut passer dans $\mathbb{Q}$. Enfin, les grecs savaient déjà que cet ensemble $\mathbb{Q}$ ne suffisait pas, puisque l'équation $x^2 = 2$ n'y a pas de solution. On est donc conduit à créer l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

Lorsqu'une équation n'a pas de solution dans un ensemble donné, on est donc naturellement conduit à créer un ensemble plus gros, qui contient les ensembles déjà rencontrés, et prolonge les opérations sur ces ensembles. Le plus gros ensemble que nous avons rencontré jusqu'à présent est $\mathbb{R}$.

Est-ce fini ? Eh bien non, malheureusement, puisque l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. On est donc conduit à inventer un ensemble plus gros que $\mathbb{R}$, le contenant, et permettant de résoudre cette nouvelle équation. C'est ce que nous allons faire dans la suite de ce cours.

I L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

A Définitions

Nous avons vu en TD une introduction des nombres complexes à partir du plan repéré par un repère[2] $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé direct : à tout point M du plan, on associe le couple $(a; b)$ de ses coordonnées. Ainsi,

$$M\,(a; b) \iff \overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

En notant 1 le couple $(1; 0)$ et i le couple $(0; 1)$, on constate qu'on peut écrire plus simplement $(a; b) = a + ib$.

L'ensemble de ces nombres est noté $\mathbb{C}$, et appelé *ensemble des nombres complexes.*

On assimile tout réel x au couple $(x; 0)$, noté $x + 0i$, ce qui permet d'inclure $\mathbb{R}$ en tant que sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

De même, tout couple de la forme $(0; y)$ est noté $0 + iy$, ou plus simplement iy, et est appelé *nombre imaginaire pur.*

Si a et b sont deux réels, $z = a + ib$ est appelée l'écriture algébrique du nombre complexe z. a est appelé *partie réelle* de z, et noté $\mathrm{Re}\,(z)$. b est appelé *partie imaginaire*[3] de z, et noté $\mathrm{Im}\,(z)$.

[1] et c'est la dernière fois que vous rencontrerez cette horrible notation $\sqrt{-1}$. En effet, si elle rappelle la propriété fondamentale du nombre i, elle a trop d'inconvénients et engendre de nombreuses confusions, surtout dans l'esprit des pauvres élèves sans défense. Par exemple, $\left(\sqrt{-1}\right)^2$ est-il égal à -1, ou à $\sqrt{(-1)^2} = 1$?

[2] Les vecteurs de base sont notés $\vec{u}$ et $\vec{v}$ plutôt que $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, pour éviter la confusion entre $\vec{\imath}$ et i.

[3] Ainsi, $\mathrm{Im}\,(z)$ est un **réel** !

Ainsi, z est réel si $\mathrm{Im}\,(z) = 0$, et imaginaire pur si $\mathrm{Re}\,(z) = 0$.

Théorème 1
Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même écriture algébrique.

En particulier, 0 a pour unique écriture $0 + 0i$.

Preuve *En effet, dire $a + ib = a' + ib'$ revient à dire que $(a; b) = (a'; b')$, soit $a = a'$ et $b = b'$.*

Une autre démonstration, basée sur les propriétés arithmétiques que nous allons voir dans la prochaine section, consiste à étudier l'équation $a + ib = 0$, d'inconnues a et b. Si $b \neq 0$, elle implique $i = -\frac{b}{a}$, donc i réel, ce qui est impossible puisque $i^2 = -1$. Donc $b = 0$, et alors nécessairement $a = 0$.

B Addition et multiplication des complexes

On a définit deux opérations sur cet ensemble $\mathbb{C}$:

$$(a; b) + (a'; b') = (a + a'; b + b') \quad \text{et} \quad (a; b) \times (a'; b') = (aa' - bb'; a'b + ab')$$

On constate que ceci revient à prolonger la multiplication sur $\mathbb{R}$ à l'ensemble des couples. Cette opération a toutes les bonnes propriétés qu'avait déjà la multiplication sur $\mathbb{R}$: elle est associative, commutative, distributive par rapport à l'addition, elle possède un élément neutre et tout complexe autre que 0 est inversible. Ceci définit sur $\mathbb{C}$ une *structure de corps*.

Le complexe i a une propriété tout à fait remarquable : son carré est égal à -1 ! En conséquence, lorsqu'on voudra additionner ou multiplier deux complexes, on utilisera les formules suivantes :

$$\boxed{(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i\,(b + b')} \text{ et } \boxed{(a + ib)\,(a' + ib') = (aa' - bb') + i\,(ab' + a'b)}$$

Notons que ceci peut se traduire par les formules $\mathrm{Re}\,(z + z') = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Re}\,(z')$ et $\mathrm{Im}\,(z + z') = \mathrm{Im}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z')$ (mais on n'a pas de formules aussi simples pour le produit !).

Propriété 1
$z^2 + z'^2 = (z + iz')\,(z - iz')$

Preuve *En effet : $z^2 + z'^2 = z^2 - iz'^2 = (z + iz')\,(z - iz')$.*

En particulier, si a et b sont réels, $a^2 + b^2 = (a + ib)\,(a - ib)$.

Exercices :
- Exercices 3 à 5 et 11 p.333.
- Exercice 45 p.337.

C Le plan complexe

À tout nombre complexe $z = x + iy$, on associe le point $M\,(x; y)$ du plan repéré par un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Cette opération est en quelque sorte l'opération inverse de celle qui nous a permis de définir les nombres complexes. D'ailleurs, on pourra aussi associer à tout complexe $z = x + iy$ le vecteur $\vec{\omega}\,(x; y)$. Les deux notions sont liées par la relation vectorielle $\vec{\omega} = \overrightarrow{OM}$. On n'hésitera d'ailleurs pas dans les exercices à confondre ces deux points de vue.

Le point $M\,(x; y)$ (ou le vecteur $\vec{\omega}\,(x; y)$) s'appelle *l'image* du nombre complexe $z = x + iy$.

Le nombre complexe $z = x + iy$ s'appelle *l'affixe* du point $M\,(x; y)$ (ou du vecteur $\vec{\omega}\,(x; y)$).

Exercice : Exercices 1 et 2 p.333.

II Conjugaison, module, division

A Définitions, premières conséquences

Définition 1 : *Le conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe $a - ib$, noté $\overline{z}$.*

Par exemple $\overline{2+3i} = 2 - 3i$, $\overline{5} = 5$ et $\overline{-3i} = 3i$.

Géométriquement, les images des nombres complexes conjugués z et $\overline{z}$ sont *symétriques* par rapport à l'axe des abscisses.

Quelques conséquences de cette définition :

Propriétés 1

- $z = z'$ équivaut à $\overline{z} = \overline{z'}$.
- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\,(z)$, et $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}\,(z)$.
- z réel équivaut à $z = \overline{z}$, z imaginaire pur équivaut à $z = -\overline{z}$.

Preuve *Laissées en exercices.*

Un propriété intéressante de la conjugaison est la suivante : si $z = a + ib$, alors $z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$. Ce nombre est positif ou nul, et vaut 0 si et seulement si $z = 0$. On peut d'ailleurs l'interpréter comme le carré de la norme du vecteur $\overrightarrow{u}\,(a;b)$ image de z.

Définition 2 : *Si $z = a + ib$, le nombre $\sqrt{a^2+b^2}$ est noté $|z|$, et appelé* module *du nombre complexe z.*

Ainsi, $|z| = 0 \iff z = 0$, et $z\overline{z} = |z|^2$.

B Division

Constatons que, si $z = a + ib \neq 0$, alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

Ceci montre en particulier que tout nombre complexe non nul est inversible, et donne un procédé (tout à fait général) pour trouver la forme algébrique de son inverse. On utilisera cette méthode (et non le résultat de ce calcul, qu'il est inutile de retenir), pour calculer des quotients de nombres complexes. Par exemple :

$$\frac{1+2i}{1-3i} = \frac{(1+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{-5+5i}{10} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

On retiendra quand même les deux formules plus théoriques suivantes :

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{|z'|^2}}$$

Exercice : Exercices 6 à 11 p.333.

C Opérations et conjugaison

Trois propriétés essentielles de la conjugaison :

Propriétés 2

- Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués : $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
- Le conjugué d'un produit est le produit des conjugués : $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$.

- Le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués : $\overline{\dfrac{z}{z'}} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Preuve *Pour le produit par exemple : si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, alors*

$$\overline{z.z'} = \overline{aa' - bb' + i\left(ab' + a'b\right)} = aa' - bb' - i\left(ab' + a'b\right)$$

et

$$\overline{z}.\overline{z'} = \left(a - ib\right)\left(a' - ib'\right) = aa' - bb' - i\left(ab' + a'b\right)$$

Faire de même pour les autres résultats.

On peut plus généralement étendre ces résultats au cas d'une somme de n termes ou d'un produit de n facteurs. En particulier, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On déduit de ces propriétés une propriété du module :

Propriétés 3
Pour tous complexes z et z', $|zz'| = |z|\,|z'|$.

Preuve *Il suffit de montrer que*[4] $|zz'|^2 = |z|^2\,|z'|^2$. *Or :*

$$|zz'|^2 = (zz')\,\overline{zz'} = zz'\overline{z}\overline{z'} = (z\overline{z})\left(z'\overline{z'}\right) = |z|^2\,|z'|^2$$

Exercice : Exercices 16, 17 et 19 p.334.

III Équation du second degré à coefficients réels

On a vu en première une méthode de résolution des équations du second degré, de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et c réels (et $a \neq 0$ bien-sûr). La quantité $\Delta = b^2 - 4ac$, ou plutôt son signe, nous a permis de compter les solutions d'une telle équation, et on a vu que lorsque $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution réelle.

On va ici s'intéresser à l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec toujours a, b et c réels, mais cette fois l'inconnue z est *complexe*. Bien entendu, on va retrouver des résultats identiques lorsque le discriminant de cette équation sera positif ou nul, mais on va en plus trouver de nouvelles solutions, non réelles, lorsque le discriminant sera strictement négatif[5].

Puisqu'on ne veut pas écrire de racines carrées de nombres négatifs, les formules rencontrées dans le cas où $\Delta \geqslant 0$ ne sont pas généralisables. On va donc revenir à l'outil fondamental de manipulation des trinômes : la *forme canonique*[6]. Écrivons :

$$az^2 + bz + c = a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

On retrouve[7] notre fameuse quantité $\Delta = b^2 - 4ac$, et la suite de la discussion va s'organiser autour de son signe :

- Si $\Delta > 0$, on utilise l'identité $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$:

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] = a\left(z - z_1\right)\left(z - z_2\right)$$

[4] « Ah bin pourquoi ? » « Parce que les deux nombres sont positifs, Jean-Pierre ! » « Ahhh ! Ok Ok Ok ! »

[5] Attention, il ne faudra pas utiliser ces résultats n'importe comment. Par exemple, lorsqu'on étudiera la fonction f définie pour tout x réel par $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, il ne faudra pas dire que cette fonction n'est pas définie en i et $-i$! Les nombres complexes interviennent dans des domaines bien délimités, et nouveaux par rapport à ce que nous connaissions jusqu'à présent. C'est d'ailleurs une des raisons pour lesquelles l'inconnue d'une équation est notée dans ce cours x si elle est réelle, et z si elle est complexe.

[6] D'ailleurs, si cela ne tenait qu'à moi, on n'utiliserait rien d'autre pour factoriser ces fameux trinômes !

[7] Ahh ! C'est de là que ça vient !

avec $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, réelles tous les deux.

- Si $\Delta = 0$, la factorisation est terminée :

$$az^2 + bz + c = a\left(z - z_0\right)^2$$

avec $z_0 = -+\dfrac{b}{2a}$. z_0 est appelée "racine double" de l'équation, en raison du carré qui la fait apparaître deux fois dans la factorisation du trinôme.

- Si $\Delta < 0$, on va cette fois utiliser notre nouvelle identité remarquable $u^2 + +v^2 = (u - iv)(u + iv)$:

$$az^2+bz+c = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}+i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\right] = a\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)$$

avec $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, racines complexes *conjuguées* de l'équation. Ceci n'est pas étonnant, nous l'avons déjà vu. Cela vient de $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$ pour tout polynôme P *à coefficients réels.*

Exemple : Soit à trouver les racines de l'équation $2z^2 + 3z + 4 = 0$.

Le discriminant est $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 4 = -23$, il est négatif donc notre équation admet deux racines complexes non réelles, conjuguées :

$$z_1 = \frac{-3-i\sqrt{23}}{4} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-3+i\sqrt{23}}{4}$$

Notons que si on a besoin de la factorisation, il est plus simple d'employer directement la décomposition canonique[8] :

$$2z^2 + 3z + 4 = 2\left(z^2 + \frac{3}{2}z + 2\right) = 2\left[\left(z+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}\right] = 2\left(z+\frac{3-i\sqrt{23}}{4}\right)\left(z+\frac{3+i\sqrt{23}}{4}\right)$$

Exercices :

- Exercices 40 à 42 p.335.
- Exercices 51, 52, 57 à 63 p.337-338.

[8] D'ailleurs, si cela ne tenait qu'à moi, ça fait longtemps que le "Delta" aurait disparu des cours de première ! Il n'apporte rien d'autre qu'une élégante et tout à fait inutile formule, et n'apprend rien aux élèves à propos des expressions comportant des carrés.

CHAPITRE II

Comportement asymptotique des fonctions

Sommaire

I Un petit "décrassage" de rentrée : limites de fonctions . . . 14

II Définitions . . . 14

A Limite finie en $+\infty$ . . . 14

B Limite $+\infty$ en $+\infty$ . . . 15

C Limite $+\infty$ en $a \in \mathbb{R}$ . . . 15

D Limite finie en $a \in \mathbb{R}$ . . . 16

III Théorèmes sur les limites . . . 16

A Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient . . . 16

B Limites en $\pm\infty$ d'une fonction polynôme ou rationnelle . . . 17

C Théorème de comparaison . . . 18

D Limite d'une fonction composée . . . 19

E Deux limites particulières . . . 20

IV Asymptotes . . . 20

A Asymptotes horizontales ou verticales . . . 20

B Asymptotes obliques . . . 20

C Complément : courbes asymptotes . . . 20

I Un petit “décrassage” de rentrée : limites de fonctions

Voir le TD sur les limites.

II Définitions

A Limite finie en $+\infty$

Dans cette section et la suivante, f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$.

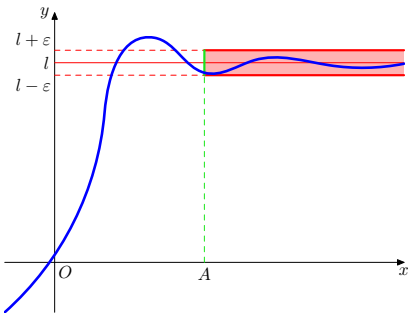
Définition 1 :
On dit que f admet l pour limite en $+\infty$ si tout intervalle ouvert centré en l (donc de la forme $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand.

On note cette propriété : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l}$. *Formellement, elle s'énonce sous la forme :*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists\, A \in \mathbb{R})\,(\forall x > A)\ \ |f(x) - l| < \varepsilon$$

Remarques :

- On notera que $|f(x) - l| < \varepsilon$ équivaut à $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$. Ainsi, la courbe de f “rentre” dans un “tube” dont le bord gauche est la droite verticale $x = A$, et dont les bords supérieur et inférieur sont les droites d'équations $y = l + \varepsilon$ et $y = l - \varepsilon$.



- Lorsqu'on veut *démontrer* que f a pour limite l en $+\infty$, on se fixe un $\varepsilon > 0$, et on cherche à résoudre partiellement l'inéquation $|f(x) - l| < \varepsilon$, en montrant que l'ensemble des solutions contient un intervalle de la forme $]A, +\infty[$. Le but du jeu est donc de trouver le réel A à partir duquel l'inéquation est forcément vérifiée[1]

- Si l'on *sait*, par contre, que la limite de f en $+\infty$ est l, on pourra utiliser cette propriété pour *construire* un A tel que $|f(x) - l| < \varepsilon$ pour tout $x > A$.

- On peut, dans la plupart des cas, remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges (sauf pour ε qui doit être strictement positif pour que l'intervalle $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ ne soit pas réduit à un point).

Définition 2 :
Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, la courbe représentative de f se rapproche de la droite horizontale Δ d'équation $y = l$. On dit que cette droite Δ est une asymptote *horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.*

La connaissance d'un tel renseignement facilite la construction de la courbe de f. Un complément fréquent à la connaissance d'une asymptote est la détermination de la position *de la courbe par rapport à son asymptote. Ceci se fait en étudiant le* signe *de $f(x) - l$.*

Exercice : Écrire la définition de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.

[1] Peu importe si cette inéquation a d'autres solutions, en particulier A n'a pas besoin d'être le meilleur possible.

B Limite $+\infty$ en $+\infty$

Définition 3 :
On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ (on dit un voisinage *de $+\infty$) sur lequel f ne prend que des valeurs strictement supérieure à M.*

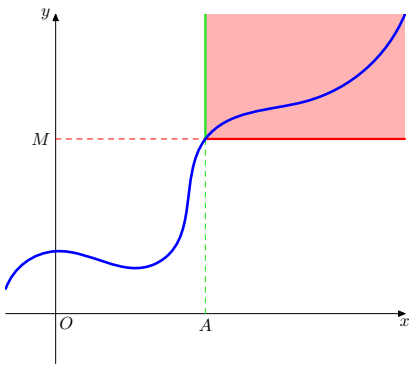
On note alors : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

Formellement :

$$(\forall M \in \mathbb{R})\,(\exists\, A \in \mathbb{R})\,(\forall x > A)\;\; f(x) > M$$

Remarques :

- Graphiquement, la courbe reste au dessus de n'importe quelle droite horizontale d'équation $y = M$ pourvu que x soit suffisamment grand.



Exercices :

a) Écrire les définitions de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

b) Les "théorèmes" suivants sont faux :

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors il existe un intervalle de la forme $[A, +\infty[$ sur lequel f est croissante.
- Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Trouver des contre-exemples le montrant clairement, avant de consulter la page 29 du livre.

C Limite $+\infty$ en $a \in \mathbb{R}$

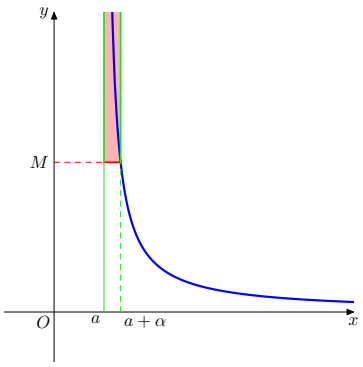
Maintenant, f est une fonction définie sur un intervalle I, et a un point de I, ou une borne de I.

Définition 4 :
On dit que f admet pour limite $+\infty$ en a si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un intervalle I_α de la forme $]a-\alpha, a+\alpha[$ tel que pour tout $x \in I_\alpha \cap D_f$, $f(x) > M$.

On note alors : $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty}$. *Formellement, cela se traduit par :*

$$(\forall M \in \mathbb{R})\,(\exists\, \alpha > 0)\,(\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap D_f)\;\; f(x) > M$$

Définition 5 :
Si f a pour limite $\pm\infty$ en a (à gauche, à droite ou sans direction), la courbe représentative de f se rapproche de la droite verticale Δ d'équation $x = a$. On dit que cette droite est asymptote verticale *à la courbe de f.*



D Limite finie en $a \in \mathbb{R}$

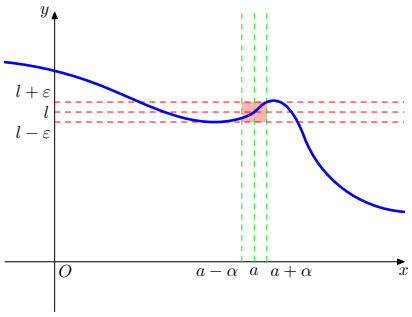
Définition 3 : *On dit que f a pour limite l en a si tout intervalle ouvert centré en l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.*

On note alors : $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = l}$. *Formellement :*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists\, \alpha > 0)\,(\forall x \in]a - \alpha, a + \alpha[\cap D_f)\ \ |f(x) - l| < \varepsilon$$

Remarques :

- Il est équivalent de dire $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, ou $\lim\limits_{x \to a} |f(x) - l| = 0$. Ainsi, on peut se contenter de savoir trouver des limites nulles !
- Si $a \in D_f$, alors $f(a) = l$. En effet, tout intervalle centré en a contient a, donc $f(a)$ doit être compris entre $l - \varepsilon$ et $l + \varepsilon$ pour n'importe quelle valeur de ε. On comprend que ceci n'est possible que si $f(a) = l$.
- Graphiquement, les points de la courbe de f se rapproche du point de coordonnées (a, l) (qui n'est pas forcément un des points de la courbe !).



- Il est parfois nécessaire de limiter les possibilités de mouvement de x. Ainsi, la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-1}$ n'a pas de limite en 1 (le vérifier !), alors que ses restrictions à $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ ont des limites en 1.

  On parle alors de limite *à gauche* (resp. *à droite*), et on la note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$).

Exercice : Les exercices 7 à 9 p.44, l'exercice 51 p.48 et l'exercice 80 p.50 permettent de jouer un peu avec ces définitions.

III Théorèmes sur les limites

A Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient

On reprendra les tableaux donnés en première :

Si f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Si f a pour limite	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $f.g$ a pour limite	$l.l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**

Si f a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et si g a pour limite	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$\pm\infty$
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**

Si f a pour limite	$l>0$ ou $+\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	0
et si g a pour limite	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**

La plupart des résultats ci-dessus sont intuitifs, et se retiennent donc facilement. On évitera dans les copies les écritures de la forme $\frac{\infty}{5}$, qui n'est qu'un raccourcis mnémotechnique pour se rappeler une colonne du tableau sur la limite d'un quotient.

Il est essentiel de se souvenir des *formes indéterminées*, sources de difficultés :

$$\infty-\infty, \qquad 0\times\infty, \qquad \frac{\infty}{\infty} \quad \text{et} \quad \frac{0}{0}$$

Si la tentative d'application d'un théorème conduit à une telle forme indéterminée, cela signifie que le théorème ne permet pas de conclure, il faut alors trouver un autre moyen d'obtenir la limite. Rappelez-vous que "forme indéterminée" n'est pas un résultat, seulement un aveu d'incompétence. Les essais d'application de théorème ne permettant pas de conclure ne devraient même pas apparaître sur vos copies.

Exercice : Pour chacune de ces formes indéterminées, trouver des contre-exemples montrant qu'on ne peut pas donner de précision concernant l'existence ou la valeur d'une éventuelle limite.

Un bon entraînement permet d'acquérir les techniques permettant de "lever" ces différentes indéterminations.

Exemples :
Soit à déterminer la limite en $+\infty$ de f définie par $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-x}{x^2+1}$.

La technique consiste ici à factoriser au numérateur et au dénominateur la "quantité dominante". Pour tout x non nul (ce qui sera forcément le cas sur un intervalle de la forme $]A,+\infty[$ avec A suffisamment grand) :

$$f(x)=\frac{x\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

Et on constate que la fraction qui reste ne comporte plus d'indétermination, et les théorèmes usuels permettent de conclure :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{\sqrt{x}}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x^2}=1\end{array}\right\}\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x^2}}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0\end{array}\right\}\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

B Limites en $\pm\infty$ d'une fonction polynôme ou rationnelle

Théorème 2
La limite en $\pm\infty$ d'une fonction polynôme[2] est égale à la limite de son terme de plus haut degré. ★

Exemple : On rédigera : $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3-3x^2+x-1\overset{=}{*}\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$, en citant éventuellement le théorème, ou au moins le mot magique "polynôme", et en indiquant qu'il est appliqué lors au point $*$ du raisonnement.

[2] i.e. de la forme $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$.

Théorème 3
La limite en $\pm\infty$ d'une fonction rationnelle[3] est égale à la limite du quotient des termes de plus hauts degrés de son numérateur et de son dénominateur. ★

Exemple : On rédigera : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{2x+3} \underset{*}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, avec les mêmes remarques que précédemment. Remarquons que le théorème ne permet pas de lever à lui tout seul l'indétermination, il faut encore simplifier la fraction avant de pouvoir conclure.

Exercice : Redémontrer ces théorèmes.

C Théorème de comparaison

Autrement appelé "théorème des gendarmes", on va rapidement voir pourquoi.

Théorème 4
Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I, et a un point de I, ou une borne de I (ou bien $\pm\infty$). On suppose que :

- pour tout $x \in I$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$.

Alors on peut conclure que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Preuve *Soit $\varepsilon > 0$, et $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ un intervalle centré en l.*

Par définition de $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x-a| < \alpha$, alors $|g(x) - l| < \varepsilon$. De même, il existe $\beta > 0$ tel que si $|x-a| < \beta$, alors $|h(x) - l| < \varepsilon$.

En prenant $\gamma = \min(\alpha, \beta)$, on est certain que $|x-a| < \gamma$ entraîne $|x-a| < \alpha$, et donc $l-\varepsilon < g(x) < l+\varepsilon$, et $|x-a| < \beta$, de sorte que $l-\varepsilon < h(x) < l+\varepsilon$.

On a donc :

$$(\forall x \in]a-\gamma, a+\gamma[\cap I) \;\; l-\varepsilon < g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) < l+\varepsilon$$

donc les valeurs de $f(x)$ entrent dans l'intervalle $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. Comme ceci est vrai de n'importe quel intervalle centré en l, on en déduit bien $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

g et h sont les deux "gendarmes" encadrant f et le forçant à se diriger vers l lorsque x tend vers a.

Exemple : Ce théorème est particulièrement utile lorsqu'un morceau de la fonction n'admet pas de limite en a. Par exemple, soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. On verra plus tard la limite en 0 de cette fonction, mais le théorème permet déjà de trouver sa limite en $+\infty$.

En effet, pour tout $x > 0$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc $-\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$. Les deux fonctions "gendarmes" ont toutes deux pour limite 0 en $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Remarquons qu'ici, les théorèmes sur les opérations ne s'appliquent pas, le numérateur de la fraction n'admettant pas de limite.

Dans le cas où on remplace l par $+\infty$ (par exemple), les conditions sont encore plus simples :

Théorème 5
Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, et a un point de I ou une borne de I (ou $\pm\infty$). On suppose :

[3] i.e. un quotient de deux polynômes, de la forme $f(x) = \dfrac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_p x^p + \cdots + b_0}$.

- pour tout $x \in I$, $g(x) \leqslant f(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.

On peut alors conclure que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Preuve *Laissée en exercice.*

Exemple : Trouver un exemple pour lequel ce théorème est nécessaire ($\lim\limits_{x \to +\infty} x + 2\cos x$ convient, et fournit même un exemple de fonction qui a pour limite $+\infty$ sans être croissante !).

Exercice : Ces différents théorèmes permettent de régler la plupart des exercices sur les limites des pages 44, 45 et 48. Essayez de faire un exercice pour chacune des techniques rencontrées. La plupart de ces exercices se font "de tête" !

D Limite d'une fonction composée

Ce théorème est un complément utile aux théorèmes sur les opérations. Il permet entre autres d'effectuer des "changements de variables", comme on va le voir.

Théorème 6
Soit f, g et h trois fonctions telles que $h = g \circ f$. Si a, b et c désignent soit un réel, soit $\pm\infty$, alors[4] :

$$\text{si } \lim_{x \to a} f(x) = b \text{ et si } \lim_{x \to b} g(x) = c, \text{ alors } \lim_{x \to a} h(x) = c.$$

Preuve *La démonstration de ce théorème n'est pas exigible, mais elle n'est pas très compliquée.*

Plaçons-nous dans le cas où a, b et c sont des réels. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que si $|y - b| < \alpha$, alors $|g(y) - c| < \varepsilon$.

De même, il existe $\beta > 0$ tel que si $|x - a| < \beta$, alors $|f(x) - b| < \alpha$.

Ainsi, pour tout x tel que $|x - a| < \beta$,

$$|h(x) - c| = |g(f(x)) - c| < \varepsilon$$

Attention, en cas de composition, on cherche la limite de g non pas en a, mais en $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Les couleurs précédentes, ou un petit dessin, montrent clairement la façon de raisonner et de rédiger.

Exemple : Cherchons les limites en $-\infty$ de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\sin\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$. On pourrait bien-sûr utiliser un encadrement, mais on va plutôt profiter du travail déjà fait.

En effet, en posant $f : x \mapsto x^2 + 1$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$, on voit que $h = g \circ f$.

On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, et on a vu précédemment que[5] $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Le théorème permet alors de conclure : $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$.

Exercice : Les exercices 27 à 31 p. 45 et 46 illustrent ce théorème.

[4] L'énoncé de ce théorème est polychromatique, donc si vous n'avez pas d'imprimante couleur, il est bon de lire au moins une fois le cours à l'écran !

[5] noter l'endroit où est calculée cette limite !

E Deux limites particulières

Théorème 7

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0}$$

Preuve *Ces deux théorèmes seront démontrés en TD.*

Ces limites permettent de justifier la dérivabilité des fonctions sin et cos en 0, et, avec les formules d'addition d'angles, en tout réel x.

IV Asymptotes

A Asymptotes horizontales ou verticales

On a déjà rencontré les deux cas :

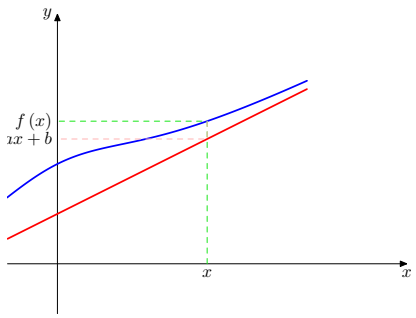
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=l$, alors la droite horizontale Δ d'équation $y=l$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, alors la droite verticale Δ d'équation $x=a$ est asymptote à la courbe.

B Asymptotes obliques

On dit que la droite Δ d'équation $y=ax+b$ est asymptote (oblique) à la courbe $\mathscr{C}_f$ si

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-(ax+b)=0$$

Intuitivement, la courbe se rapproche de la droite Δ, $f(x)-(ax+b)$ représentant la distance (mesurée verticalement) entre le point d'abscisse x de $\mathscr{C}_f$ est celui de Δ.



Le signe de $f(x)-(ax+b)$ permet de préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

C Complément : courbes asymptotes

On peut généraliser les considérations précédentes. On va se contenter d'un exemple, sous forme de TD.

Soit à étudier la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^4-4}{4x^2}$.

f est définie sur $D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. De plus, elle est paire, on se contentera donc de faire son étude sur $\mathbb{R}^{*+}$, et on complétera la courbe tracée par une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

$$f'(x)=\frac{1}{4}\frac{4x^3\times x^2-2x\left(x^4-4\right)}{x^4}=\frac{1}{4}\frac{2x^5+8x}{x^4}=\frac{1}{2}\frac{x^4+4}{x^3}$$

$f'(x)$ est donc du signe de x, et donc croissante sur $]0,+\infty[$. Regardons les limites aux bornes :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0^+} x^4-4=-4\\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0^+\end{array}\right\}\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$$

donc l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$. D'autre part, f est une fonction rationnelle, donc sa limite en $+\infty$ se trouve facilement :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-4}{4x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{4x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4}=+\infty$$

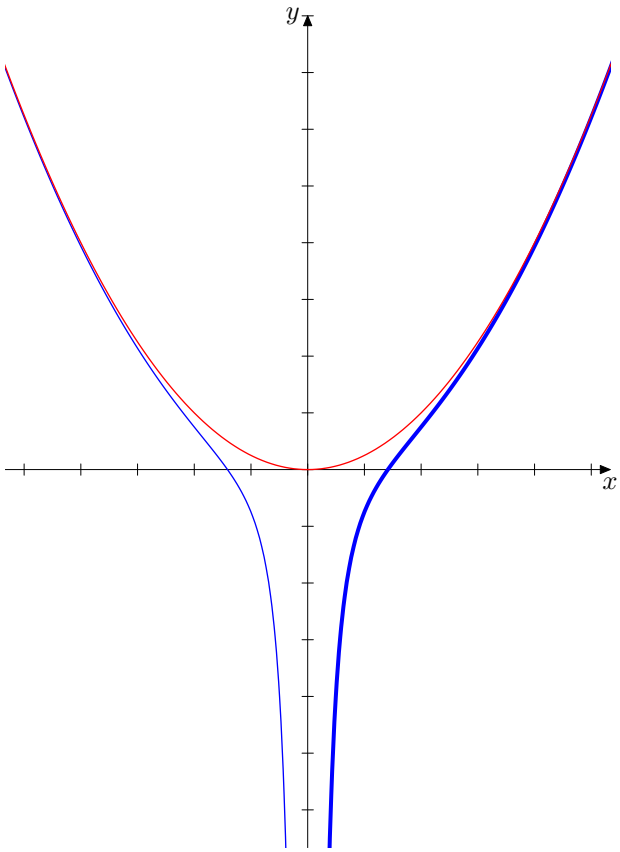
x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Étudions plus en détail la forme de la courbe en $+\infty$. On se convainc facilement que $\mathscr{C}_f$ ne peut admettre de droite asymptote ($f(x)-(ax+b)$ tend vers $+\infty$ quels que soient a et b). Mais par contre :

$$f(x)-\frac{x^2}{4}=\frac{-4}{x^2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

donc la courbe se rapproche de la parabole d'équation $y=\dfrac{x^2}{4}$. On dit que cette parabole est *parabole asymptote* à la courbe.

De plus, $f(x)-\frac{x^2}{4}>0$ pour tout x, donc la courbe reste toujours en dessous de la parabole. Ce renseignement permet de préciser le comportement de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$, la parabole étant une courbe simple à tracer et bien connue (presque autant que les droites !).



CHAPITRE III

Le raisonnement par récurrence

Sommaire

I	**Principe du raisonnement par récurrence**	**24**
II	**Des exemples**	**25**
III	**Exercices**	**26**

Lors du cours sur les suites en première S, on a énoncé les résultats suivants sur les suites arithmétiques et géométriques, et avons signalé que nous ne disposions pas des outils nécessaires pour les démontrer :

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Relation de récurrence	$\begin{cases} u_0 = a \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$	$\begin{cases} v_0 = a \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ \ v_{n+1} = v_n \times r \end{cases}$
Expression explicite	$u_n = u_0 + nr$	$v_n = v_0 r^n$
Somme des termes consécutifs	$u_p + \cdots + u_q = (q-p+1)\,\dfrac{u_p + u_q}{2}$	$v_p + \cdots + v_q = v_p \dfrac{1 - r^{q-p+1}}{1-r}$

Le problème dans ces démonstrations vient des petits points qu'on écrit pour dire "et on répète ces opérations jusqu'à n". Le principe de raisonnement par récurrence va permettre de justifier tout cela.

I Principe du raisonnement par récurrence

Théorème 8

$\mathscr{P}_n$ est une propriété dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$. Si :

- $\mathscr{P}_0$ est vraie (on dit que la propriété est *initialisée* ou *fondée*),
- pour tout entier n, $\mathscr{P}_n$ vraie entraîne $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie (on dit que la propriété est *héréditaire*),

alors $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve *(Hors programme)*

Supposons que $\mathscr{P}_n$ ne soit pas vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et notons n_0 le plus petit entier n pour lequel $\mathscr{P}_n$ est fausse.

On a donc : $\mathscr{P}_n$ est vraie pour $0 \leqslant n < n_0$, et $\mathscr{P}_{n_0}$ est fausse.

n_0 n'est pas égal à 0, puisque par hypothèse $\mathscr{P}_0$ est vraie. Donc on peut considérer l'entier $n_0 - 1$.

Comme on vient de le voir, $\mathscr{P}_{n_0-1}$ est vraie, mais alors l'hérédité de la propriété entraîne que $\mathscr{P}_{n_0}$ est encore vraie, ce qui est absurde.

Donc notre hypothèse initiale conduit à une contradiction, il est donc faux de supposer que $\mathscr{P}_n$ n'est pas vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques :

- Les deux hypothèses sont essentielles dans ce principe : une hypothèse de récurrence peut parfaitement être héréditaire... mais fausse pour tout n si elle ne l'est pas au moins pour $n = 0$.
- La démonstration de l'hérédité gène souvent les élèves, car ils ont l'impression de démontrer $\mathscr{P}_n$ pour tout n.

  En fait, il n'en est rien. On ne dit rien dans cette étape sur la véracité de $\mathscr{P}_n$ ni sur celle de $\mathscr{P}_{n+1}$. La seule chose qui nous intéresse est *le lien* qui existe entre $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$. On démontre :

  $$\mathscr{P}_n \boxed{\Longrightarrow} \mathscr{P}_{n+1}$$

  sans *affirmer* ni que $\mathscr{P}_n$ est vraie, ni que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vrai.

  C'est l'initialisation qui transmettra à la fin du raisonnement le caractère vrai de $\mathscr{P}_0$ à tous ses successeurs.

  Insistons bien encore une fois sur la manière de rédiger cette étape : supposons $\mathscr{P}_n$ vrai **pour un certain indice** n, et démontrons **qu'alors** $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vrai.
- Il se peut que la propriété $\mathscr{P}_n$ ne soit pas définie pour les premiers indices. En fait, on peut généraliser le principe ci-dessus en modifiant l'hypothèse d'initialisation : si l'on démontre que la propriété $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, et qu'elle est vraie pour un certain rang n_0, alors on peut conclure qu'elle est vraie pour tout les entiers n supérieurs à n_0 (on dit alors qu'elle est vraie sur "l'intervalle" $[\![n_0; \infty[\![$).

II Des exemples

Exemple : Démontrons avec ce principe la formule donnant le terme général d'une suite arithmétique en fonction de n.

On a donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = a$ est pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Énoncé de l'hypothèse Notons $\mathscr{P}_n : u_n = a + nr$.

Initialisation $\mathscr{P}_0$ est vraie : elle affirme que $u_0 = a + 0 \times r = a$, ce qui est vrai.

Hérédité Supposons que $\mathscr{P}_n$ soit vraie *pour un certain entier* n, et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie.

Il s'agit ici de calculer u_{n+1}, et de vérifier qu'il peut s'écrire $u_{n+1} = a+(n+1)\,r$, en utilisant les hypothèses *et* l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}_n$, supposée vraie.

$$u_{n+1} \underset{\text{définition}}{=} u_n + r \underset{\mathscr{P}_n}{=} (a + nr) + r = a + (n+1)\,r$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est bien une conséquence de $\mathscr{P}_n$.

Conclusion $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple : Un autre exemple : étudions la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Cette suite semble relever à la fois du cas arithmétique (on ajoute 1 et du cas géométrique (on multiplie par 2). La difficulté ici est que l'on ne sait pas ce qu'on doit trouver. Calculons donc quelques valeurs pour nous fixer les idées[1] :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 2u_0 + 1 = 1 \\ u_2 &= 2u_1 + 1 = 3 \\ u_3 &= 2u_2 + 1 = 7 \\ u_4 &= 2u_3 + 1 = 15 \\ u_5 &= 2u_4 + 1 = 31 \end{aligned}$$

À ce stade, les informaticiens et les connaisseurs des puissances de 2 auront reconnu la loi qui semble émerger : u_n semble être égal à une puissance de 2 moins un. Plus précisément, il semblerait que

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n = 2^n - 1$$

C'est cette conjecture que nous allons tenter de démontrer (sans être certain qu'elle soit vraie, il se peut que le calcul de u_6 ou u_7 la contredise, mais on ne peut de toute façon pas calculer éternellement des valeurs de u_n).

Énoncé de l'hypothèse Notons $\mathscr{P}_n : u_n = 2^n - 1$.

Initialisation $\mathscr{P}_0$ est vraie : elle affirme que $u_0 = 2^0 - 1 = 0$, ce qui est vrai.

Hérédité Supposons que $\mathscr{P}_n$ soit vraie *pour un certain entier* n, et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie.

Il s'agit ici de calculer u_{n+1}, et de vérifier qu'il peut s'écrire $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$, en utilisant les hypothèses *et* l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}_n$, supposée vraie.

$$u_{n+1} \underset{\text{définition}}{=} 2u_n + 1 \underset{\mathscr{P}_n}{=} 2\,(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est bien une conséquence de $\mathscr{P}_n$.

Conclusion $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

[1] Ceci est un principe de recherche fondamental dans les raisonnements par récurrence mais aussi dans tous les exercices ouverts : lorsqu'on ne sait pas ce qu'on doit démontrer, on étudie quelques exemples, ici les premières valeurs de la suite, pour se faire une idée. Nous utiliserons très souvent cette *heuristique*, en particulier lors de l'épreuve pratique.

III Exercices

a) En forme de ROC (bac sept. 2007) : on suppose connus les résultats suivants : les dérivées des fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$ sont respectivement $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 1$ (en abrégé, $(1)' = 0$ et $(x)' = 1$).

Il s'agit de démontrer que la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

b) On pose pour tout $n \geqslant 1$ $u_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$ (somme des n premiers nombres impairs). Montrer que $u_n = n^2$.

c) Montrer que : pour tout $x \in]-1; +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ (inégalité de Bernoulli, voir aussi l'exercice 40 p.16).

d) Exercices 33, 34, 42, 43 p.16, 50, 54, 55, 61 p.17.

e) Pour un exemple de récurrence *à deux étapes* : 62 p.18.

f) En DM : un exercice d'entraînement à l'épreuve expérimentale.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$.

f1) À l'aide d'un tableur, calculer et représenter graphiquement les 30 premières valeurs de la suite. Le nuage de points obtenu a-t-il une particularité ? Si oui, émettre une conjecture.

f2) Chercher, toujours par expérimentation à l'aide du tableur, un polynôme P du second degré tel que $u_n = P(n)$ pour tout n compris entre 0 et 30.

f3) Démontrer que $u_n = P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La feuille de calcul, avec le graphique, devra figurer dans la copie, et les formules utilisées pour automatiser les calculs devront être indiquées. La démonstration de $u_n = P(n)$ se fera sur la copie.

g) Pour s'amuser (possiblement en DM aussi) : exercices 67 et 68 p.18.

CHAPITRE IV

Généralités sur les suites

Sommaire

I Différents modes de définition d'une suite 28

II Suites arithmétiques et géométriques 28

III Diverses formes de représentations graphiques d'une suite 30

A Représentation sur un axe 30

B Représentation sous forme fonctionnelle 30

C Représentation des suites définies par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ 30

I Différents modes de définition d'une suite

Une suite est une application de $\mathbb{N}$ (ou d'un intervalle non borné de $\mathbb{N}$, de la forme $[\![n_0, \infty[\![$).

On peut définir une suite de plusieurs manières différentes. Voici trois types très courants :

- Définition explicite : $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A; +\infty[$.

  Par exemple, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$, ou $v_n = \sqrt{n-3}$.

- Définition par récurrence : u_{n_0} donné, et $u_n = f(u_{n-1})$, f étant une fonction définie sur un certain intervalle de $\mathbb{R}$.

  Exemple : $u_0 = 2$, et $u_n = \sqrt{2 - u_{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

  On peut généraliser le procédé : par exemple, on peut considérer la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (c'est la célèbre *suite de Fibonacci*).

- Suite définie par une somme : $u_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} v_k$.

  Par exemple : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}$.

Il faut bien comprendre que ces suites se traitent de façons très différentes selon leur définition. En particulier, il devrait vous paraître étrange de ne pas faire de raisonnement par récurrence lors de l'étude d'une suite définie par une relation de récurrence.

II Suites arithmétiques et géométriques

Définition 6 :
Une suite (u_n) est dite arithmétique *si elle vérifie une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + r$, où r est un réel donné, appelé la* raison *de la suite.*

Propriétés 4

- Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a + nr$.

- Réciproquement, la suite (u_n) définie par $u_n = a + nr$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u_0 = a$.

Preuve • *Soit $mscrP_n : u_n = a + nr$.*

$mscrP_0 : u_0 = a + 0 \times r = a$ est vraie.

Supposons $mscrP_n$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$u_{n+1} = u_n + r \subset = mscrP_n\,(a + nr) + r = a + (n+1)\,r$$

donc $mscrP_{n+1}$ est encore vraie.

$mscrP_n$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

• *Réciproquement, si $u_n = a + nr$, alors*

$$u_{n+1} - u_n = (a + (n+1)\,r) - (a + nr) = r$$

donc (u_n) est bien arithmétique de raison r, de premier terme $u_0 = a + 0 \times r = a$.

Ainsi, pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il n'est pas nécessaire de calculer $u_{n+1} - u_n$.

Propriété 2
Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, avec $m \geqslant n$,

$$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_m = (m - n + 1)\,\frac{u_n + u_m}{2}$$

Mnémotechniquement : "nombre de terme multiplié par la moyenne des termes extrêmes".

Preuve *Partons d'une suite de raison 1 : notons $mscrP_n$: $S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$.*
$mscrP_1$ est vraie, les deux membres de l'égalité étant égaux à 1.
Supposons $mscrP_n$ vraie pour un certain n. Alors :

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n\,(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(1 + \frac{n}{2}\right) = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$$

donc $mscrP_{n+1}$ est encore vraie.
On a alors, plus généralement :

$$n + (n+1) + \cdots + m = S_m - S_{n-1} = \frac{m\,(m+1)}{2} - \frac{(n-1)\,n}{2} = \frac{m^2 + m - n^2 + n}{2} = \frac{(m+n)\,(m-n+1)}{2}$$

Si maintenant (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme a, on a :

$$\begin{aligned} u_n + u_{n+1} + \cdots + u_n &= (a + nr) + (a + (n+1)\,r) + \cdots + (a + mr) \\ &= (m - n + 1)\,a + r\,(n + (n+1) + \cdots + m) \\ &= (m - n + 1)\,a + r\frac{(m+n)\,(m-n+1)}{2} \\ &= (m - n + 1)\,\frac{(a + nr) + (a + mr)}{2} \end{aligned}$$

Définition 7 :
Une suite (v_n) est dite géométrique *si elle vérifie une relation de récurrence de la forme $v_{n+1} = v_n \times r$, où r est un réel donné, appelé la* raison *de la suite.*

Propriétés 5

- Si (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = a$ et de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a.r^n$.

- Réciproquement, la suite (v_n) définie par $v_n = a.r^n$ est une suite géométrique de raison r et de premier terme $u_0 = a$. ★

De la même façon, pour démontrer qu'une suite est géométrique, il n'est pas nécessaire de calculer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

Propriété 3
Si (v_n) est une suite géométrique de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, avec $m \geqslant n$,

$$v_n + v_{n+1} + \cdots + v_m = v_n\frac{1 - r^{m-n+1}}{1 - r}$$

Mnémotechniquement : "premier terme fois un moins la raison puissance le nombre de termes sur un moins la raison" ★

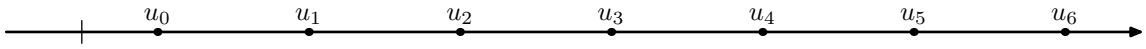
Les preuves de ces énoncés sont laissées en exercices.

Tous ces résultats doivent être connus *par cœur* !

III Diverses formes de représentations graphiques d'une suite

A Représentation sur un axe

On représente simplement les termes successifs sur un axe, en les numérotant. Par exemple, pour la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + 2n$, on obtient :



L'intérêt n'est pas énorme, mais cela est parfois suffisant pour se faire une idée.

B Représentation sous forme fonctionnelle

Ici on exploite le fait qu'une suite (u_n) n'est rien d'autre qu'une *fonction* à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou éventuellement $\mathbb{C}$), dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$. On représente donc simplement cette fonction, avec les indices sur l'axe des abscisses, et les valeurs sur l'axe des ordonnées. Cette représentation graphique est l'ensemble des points $M_n\,(n, u_n)$.

Exemples :
Un exercice d'une épreuve expérimentale de l'an passé proposait d'étudier la suite définie par $u_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 11$.

Ici, une représentation graphique à l'aide d'un tableur (ou d'une calculatrice, mais c'est moins clair) permettait d'obtenir une formule donnant u_n en fonction de n :

On faisait alors constater à l'élève que la courbe sur laquelle semblaient s'aligner les points M_n ressemblait furieusement à une parabole, dont on trouvait une équation, pour obtenir la formule :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n = n^2 - 12n$$

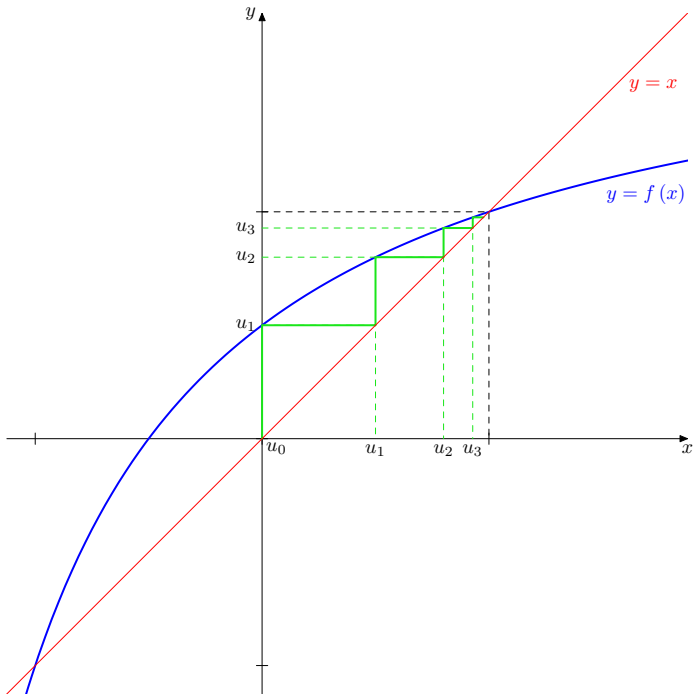
formule qu'il ne restait plus qu'à démontrer par une récurrence simple.

C Représentation des suites définies par une relation de la forme $u_{n+1} = f\,(u_n)$

L'idée est ici un peu différente de ce qui précède. Cette construction doit être maîtrisée, parce que l'étude de ces suites s'en trouve franchement simplifiée.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$.

Il existe des techniques permettant de trouver algébriquement une relation donnant directement u_n en fonction de n, en effectuant un *changement de suite inconnue* de manière à se ramener à une suite géométrique (voir le TD à ce sujet). Ici, nous allons simplement montrer comment construire les premiers termes de cette suite :



On remarque ici que u_n semble tendre vers l'abscisse (ou l'ordonnée) d'un des points d'intersection de la courbe représentative de f et de la première diagonale, d'équation $y = x$.

La recherche de ces points d'intersection est donc une priorité dans l'étude de ces suites, et leurs abscisses sont appelées les *points fixes* de la fonction f.

Nous reviendrons sur l'étude de ces suites dans un prochain cours.

CHAPITRE V

Combinatoire

Sommaire

I Généralités **34**
- A Définitions 34
- B Principes 34
- C Factorielle 35

II Permutations, p-listes **35**
- A Permutations d'un ensemble 35
- B p-listes 36

III Combinaisons **37**
- A Définition 37
- B Calcul de $\binom{n}{p}$ 37

IV Propriétés des coefficients du binôme, formule du binôme de Newton **38**
- A Quelques propriétés des $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ 38
- B Formule du binôme de Newton 40

Introduction

Lorsqu'on lance une pièce de monnaie normalement équilibrée, elle retombe une fois sur deux sur la face pile. Si l'on répète cette expérience, on peut attribuer une probabilité à l'événement "obtenir k piles après n lancers", en construisant un arbre. Mais le calcul devient vite pénible, surtout si l'on considère une pièce non équilibrée.

Par exemple, pour n lancers, si l'on note X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de "piles" obtenus, on a :

- Pour $n = 1$, la loi de X_1 est :

X_1	0	1
p_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- Pour $n = 2$, la loi de X_2 est :

X_2	0	1	2
p_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

- Pour $n = 3$, la loi de X_3 est :

X_3	0	1	2	3
p_3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- Mais pour $n = 10$, quelle est la loi de X_{10} ? On peut la trouver, mais cela est beaucoup plus pénible avec nos moyens actuels :

X_{10}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_{10}	$\frac{1}{2^{10}}$	$\frac{10}{2^{10}}$	$\frac{45}{2^{10}}$	$\frac{120}{2^{10}}$	$\frac{210}{2^{10}}$	$\frac{252}{2^{10}}$	$\frac{210}{2^{10}}$	$\frac{120}{2^{10}}$	$\frac{45}{2^{10}}$	$\frac{10}{2^{10}}$	$\frac{1}{2^{10}}$

On voit apparaître une certaine régularité, mais les coefficients devant $1/2^{10}$ ne suivent pas un schéma connu pour l'instant. La suite du cours va nous apprendre à calculer ces coefficients et ainsi modéliser de nouvelles expériences aléatoires.

I Généralités

A Définitions

Dans toute cette partie, E désigne un ensemble fini non vide possédant n éléments.

Dénombrer une partie A de E consiste à trouver son *cardinal*, i.e. le nombre de ses éléments. Le problème se pose en général lorsque A est donné *en compréhension*, c'est-à-dire par une description des éléments de E qui font partie de A. Par exemple : "les mains de belote comportant un couple Valet-9".

Ce dénombrement est particulièrement utile en probabilités, en situation d'équiprobabilité, puisque la probabilité d'un événement A est alors égale au cardinal de A divisé par le cardinal de l'univers.

B Principes

Principe de la somme :

aussi appelé *principe d'inclusion-exclusion*. Il s'écrit, pour deux parties de E, sous la forme :

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$$

avec en particulier $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B)$ si A et B sont *disjointes*. L'idée sous-jacente est que lorsque calcule la somme $\operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B)$, on compte deux fois les éléments de l'intersection $A \cap B$.

Ce principe se généralise à un nombre quelconque de parties de E, l'observation de la formule pour trois parties montrant le principe :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A \cup B \cup C) = {} & \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(C) - \operatorname{card}(A \cap B) \\ & - \operatorname{card}(A \cap C) - \operatorname{card}(B \cap C) \\ & + \operatorname{card}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

relation qui se vérifient bien à l'aide d'un petit dessin.

Ce principe s'utilise le plus souvent dans le cadre restreint suivant : si A_1, $A_2, \ldots,$ A_p forme une *partition* de A, i.e. si A est réunion *disjointe* de A_1, $A_2, \ldots,$ A_p, alors

$$\text{card}\,(A) = card\,(A_1) + \text{card}\,(A_2) + \cdots + \text{card}\,(A_p)$$

Principe du produit :

ou *principe des boîtes*. Il s'énonce ainsi : si une situation comporte p étapes offrant respectivement n_1, $n_2, \ldots,$ n_p possibilités *indépendantes* les unes des autres, alors le nombre total de possibilités est $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$.

Exercice : L'exercice 32 p.250 devrait vous rappeler des souvenirs.

C Factorielle

Une fonction sur les entiers va intervenir constamment dans la suite de ce cours : la *factorielle*.

Définition 4 : *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on appelle* factorielle de n, *ou plus brièvement* factorielle n, *et on note $n!$, le nombre :*

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n, \text{ avec par convention } 0! = 1$$

Remarquons que cette définition peut aussi se donner sous forme récurrente, ce qui est parfois utile dans les démonstrations :

$$0! = 1, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ (n+1)! = (n+1) \times n!$$

Exercices :

- Montrer, sans utiliser de calculette, que $6! \times 7! = 10!$.
- Les exercices 1 à 5 p. 247 vous invitent à manipuler cette définition.
- On pourra aussi démontrer la relation suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k.k!$.

II Permutations, p-listes

A Permutations d'un ensemble

Une *permutation* de l'ensemble E est une liste des n éléments de E, rangée dans un certain ordre. L'ordre des éléments de cette liste est important.

Exemples :

- Si $E = \{a; b; c; d\}$, $(a; c; b; d)$ et $(d; c; b; a)$ sont deux permutations de E.
- Si n chevaux participent à une course, la liste ordonnée des arrivées est une permutation de l'ensemble de leurs noms.

Combien y a-t-il de permutations d'un ensemble à n éléments ? Pour le trouver, utilisons le *principe du produit* (ou *principe des boîtes*, comme certains l'appellent, paraît-il) : écrivons les n termes de la permutation dans n boîtes numérotées.

Pour composer une permutation, nous avons n choix possibles pour la première boîte. Une fois ce premier terme choisi, il reste $n-1$ éléments possibles pour la deuxième boîte, puis $n-2$ choix pour la troisième boîte, et ainsi de suite jusqu'à la dernière boîte pour laquelle nous n'avons plus qu'un seul choix. Ainsi :

Théorème 9
Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n! \qquad \bigstar$$

Par exemple, si 7 chevaux participent à une course, il y a $7! = 5040$ ordres d'arrivée possibles. Si l'on vous propose de parier sur un ordre d'arrivée, vous ne devriez accepter de jouer que si le bon choix vous fait gagner 5040 fois votre mise initiale[1].

La fonction de la calculatrice permettant de calculer des arrangements est $\boxed{\text{n!}}$ ou $\boxed{\text{x!}}$.

Exercices :
- Exercice 6 p.247.
- Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « MARTIN » ? Combien de ces anagrammes commencent par une consonne ?

B p-listes

Une p-liste (ou liste de longueur p) de E est un p-uplet d'éléments de E[2]. Par convention, une 0-liste est une liste ne comportant aucun élément.

Par exemple, $(t; r; u; c; m; u; c; h; e)$ est une 9-liste de l'ensemble $E = \{a; b; c; \ldots; y; z\}$.

Pour dénombrer les p-listes, on doit distinguer le cas des listes dans lesquelles on a le droit de prendre plusieurs fois un même élément de E (les p-listes *avec répétitions*) de celui où les répétitions sont interdites (les p-listes *sans répétitions* ou *arrangements*.

1 p-listes avec répétitions

Théorème 10
Le nombre de p-listes (avec répétitions, si l'on doit préciser) d'un ensemble E à n éléments est n^p.

> ***Preuve*** *Il suffit d'utiliser le principe des boîtes : il y a n façons de remplir la première case de la p-liste, n façons de remplir la deuxième...*

La situation de référence pour les p-listes est le tirage *avec remise* de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Ici, l'*ordre* des termes est important, et on accepte les *répétitions*.

Exercices :
- Combien y a-t-il de numéros de téléphone commençant par 0383 ?
- Combien y a-t-il de codes de carte bleue distincts ?
- Combien y a-t-il d'applications d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à m éléments ?
- Exercice 11 p.247.

2 p-listes sans répétitions, ou arrangements

Définition 5 : *Un p-arrangement de E (ou p-liste de E sans répétitions) est une p-liste d'éléments* deux-à-deux distincts *de E.*

Une permutation d'un ensemble E à n éléments est donc un n-arrangement de E.

La fonction de la calculatrice permettant de calculer des arrangements est $\boxed{\text{nPr}}$.

[1] En fait, vous ne devriez pas accepter de jouer, beaucoup trop d'autres paramètres entrant en jeu, et le jeu de pari en lui-même étant une bien vilaine façon de chercher son bonheur dans ce monde.

[2] C'est donc un élément du produit cartésien $E \times E \times \cdots \times E = E^p$.

Théorème 11
Le nombre de p-arrangements d'un ensemble E à n éléments est

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Il est parfois noté A_n^p. ★

La situation de référence pour les p-arrangements est le tirage *sans remise* de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Ici, l'*ordre* des termes est important, et on n'accepte pas les *répétitions*.

Exercices :

- 20 chevaux prennent le départ d'une course ; combien y a-t-il de tiercés distincts ?
- Un porte manteau comporte 7 cintres. De combien de façons peut-on y pendre 5 manteaux ?
- Une application f de E dans F est dite *injective* si deux éléments distincts quelconques de E ont des images distinctes. Combien y a-t-il d'applications injectives d'un ensemble E à n éléments dans un ensemble F à m éléments ?
- Exercices 12, 13 et 14 p.247-248.

III Combinaisons

A Définition

Définition 6 : *Une p-combinaison de E est une* partie *de E à p éléments.*

Les situations dans lesquelles on utilise les combinaisons sont les situations où on doit choisir p objets parmi n, l'ordre n'intervenant pas. C'est le cas en particulier lors d'un tirage *simultané* (et donc sans remise) de p boules dans une urne en contenant n. Par exemple, lors d'un tirage du loto, un tirage de 6 boules parmi 49 est une 6-combinaison de l'ensemble des 49 boules.

B Calcul de $\binom{n}{p}$

Théorème 12
Le nombre de p-combinaisons d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{p}$ (ou parfois C_n^p), il est égal à 0 pour $p > n$, et, pour $0 \leqslant p \leqslant n$, à

$$\binom{n}{p} = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-p+1)}{p\,(p-1)\ldots 1} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

Preuve *Pour $p = 0$, il n'y a qu'une seule partie de E à 0 éléments, à savoir l'ensemble vide, donc $\binom{n}{0} = 1$.*

Si $p \neq 0$, un p-arrangement de E est déterminé par

- *le choix d'une p-partie de E : il y en a $\binom{n}{p}$;*
- *la faon d'ordonner les p éléments de cette partie : il y a $p!$ façon de le faire.*

Ainsi, le nombre de p-arrangements de E vérifie : $A_n^p = \binom{n}{p} \times p!$, d'où le résultat.

La fonction de la calculatrice permettant de calculer les combinaisons est $\boxed{\text{nCr}}$.

Remarques :
La relation $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, si elle a le mérite d'être élégante et compacte, et de faciliter un certain nombre de démonstrations théoriques, n'a qu'un intérêt pratique limité.

En effet, il semble tout à fait déraisonnable de l'utiliser pour calculer par exemple $\binom{36}{3}$: il faudrait calculer 36! et 33!, ce qui demande un grand nombre de multiplications, et surtout sort des capacités de calcul exact des calculettes non formelles. On préférera utiliser la formule :

$$\binom{36}{3} = \frac{36 \times 35 \times 34}{3 \times 2 \times 1} = 6 \times 35 \times 34 = 7140$$

calcul qui peut se faire sans machine.

On pourra aussi faire l'exercice 15 p.248 en essayant d'éviter tout recours à la calculette.

Exercices :

- Au poker, on distribue des mains de 5 cartes tirées dans un paquet de 52 cartes.

  a) Combien y a-t-il de mains distinctes ?

  Réponse : il faut choisir 5 cartes parmi 52, donc il y a $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$ mains distinctes.

  b) Combien de mains comportent le valet de trèfle ?

  Réponse : en dehors du valet de trèfle, il faut choisir 4 cartes parmi les 51 restantes, donc il y a $\binom{51}{4} = 249\,900$ telles mains.

  c) Combien de mains comporte exactement deux coeurs ?

  Réponse : il faut choisir 2 coeurs parmi les 13 du jeu, puis 3 cartes parmi les 39 qui ne sont pas des coeurs, il y a donc

  $$\binom{13}{2} \times \binom{39}{3} = 78 \times 9139 = 712\,842$$

  mains comportant exactement deux coeurs.

  d) Combien de mains comportent au moins trois as ?

  Réponse : il faut additionner les mains comportant exactement 3 as et celles en comportant 4 (principe de la somme, une main ne pouvant contenir à la fois 3 as et 4 as). Le nombre de mains de cette forme est donc

  $$\binom{4}{3} \times \binom{48}{2} + \binom{4}{4} \times \binom{48}{1} = 4 \times 1128 + 1 \times 48 = 4560$$

  e) Combien de mains ne comportent ni pique, ni le roi de coeur ?

  Réponse : il suffit d'enlever le roi de coeur et tous les piques du jeu avant de donner la main, il y a donc $\binom{38}{5} = 501\,942$ telles mains.

- Combien y a-t-il de diagonales dans un polygone (régulier) à n sommets ? quels sont les polygones qui ont autant de diagonales que de cotés ? quel polygone a exactement 1325 diagonales ?

- Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $\{1; 2; \ldots; n\}$ dans $\{1; 2; \ldots; m\}$?

- Exercices 16, 17, 18, 22 p.248.

IV Propriétés des coefficients du binôme, formule du binôme de Newton

A Quelques propriétés des $\binom{n}{p}$

Propriété 4 (Symétrie)
Pour tout entier n et tout entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Preuve *La relation* $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$ *montre immédiatement cette propriété.*

Voici une interprétation ensembliste de cette propriété : choisir une p-partie A d'un ensemble E à n éléments revient à choisir les p éléments qui sont dedans, mais cela revient aussi à choisir les $n-p$ *qui ne sont pas dedans (i.e. à choisir la* $(n-p)$*-partie* $\complement_E(A)$*).*

Cette propriété simplifie en particulier un certain nombre de calculs : il semble plus simple de calculer $\binom{32}{2}$ que de calculer $\binom{32}{30}$.

Propriété 5 (Relation de Pascal)
Pour tout entier n non nul et tout entier p tel que $1 \leqslant p \leqslant n-1$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

Preuve
- Preuve ensembliste *: soit E un ensemble possédant au moins deux éléments. Soit a l'un des éléments de E. Les p-parties de E se décomposent en deux catégories :*
  - *celles qui contiennent a : il y en a* $\binom{n-1}{p-1}$ *(on prend a, puis* $p-1$ *éléments dans le complémentaire de* $\{a\}$*),*
  - *celles qui ne contiennent pas a : il y en a* $\binom{n-1}{p}$ *(on choisit p éléments dans le complémentaire de* $\{a\}$*).*

  d'où le résultat.
- Preuve algébrique *: en utilisant la relation* $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$. *Celle-ci est laissée en exercice.*

Une application immédiate de cette formule :

Théorème 13
Les coefficients $\binom{n}{p}$ sont entiers, pour tout couple d'entiers (n,p).

Preuve *C'est déjà le cas si* $p<0$ *ou* $p>n$*, et aussi si* $p=0$ *ou* $p=n$*.*

Considérons la propriété $\mathscr{P}_n$ *: pour tout entier p compris entre 0 et n,* $\binom{n}{p}$ *est entier.*

- $\binom{0}{0} = 1$*, donc* $\mathscr{P}_0$ *est vraie.*
- *Supposons* $\mathscr{P}_n$ *vraie pour un certain entier n.*

  On sait que $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1}$ *sont entiers, puisqu'égaux à 1.*

  Si p est compris entre 1 et n, alors $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}$ *est, d'après l'hypothèse de récurrence, somme de deux entiers, donc entier.*

  Ainsi, $\binom{n+1}{p}$ *est entier pour tout p compris entre 0 et* $n+1$*, donc* $\mathscr{P}_{n+1}$ *est encore vraie.*
- *Par le principe de récurrence,* $\mathscr{P}_n$ *est donc vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

Une disposition bien pratique pour calculer les coefficients du binôme, exploitant cette relation, est connue sous le nom de *triangle de Pascal*[3] :

[3] mais la disposition est connue depuis bien plus longtemps, les chinois l'ayant déjà découverte quelques centaines d'années auparavant (japonais, bien entendu).

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
$\vdots$	$\vdots$								$\ddots$

Exercices :

- Exercice 26 p.248.
- Exercice 48 à 51 p.251 pour des exemples de raisonnements combinatoires conduisant à des relations entre $\binom{n}{p}$.

B Formule du binôme de Newton

Théorème 14

Pour tous complexes a et b, et tout entier $n \geqslant 1$,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{p}a^{n-p}b^p + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$$

Preuve *L'égalité est clairement vraie pour $n = 1$.*

Supposons la vraie pour un entier $n \geqslant 1$. De $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \times (a+b) = a\,(a+b)^n + b\,(a+b)^n$, on tire, en organisant les calculs :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \ldots \qquad\qquad & + \binom{n}{n}ab^n \\ + \binom{n}{0}a^n b + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \ldots \qquad & + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}\end{aligned}$$

En regroupant les produits similaires (i.e. en sommant la relation ci-dessus colonne par colonne), on obtient des monômes de la forme $\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)a^{n+1-k}b^k$, et la relation de Pascal nous apprend alors qu'ils peuvent se réécrire $\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$.

En remplaçant finalement $\binom{n}{0}a^{n+1}$ par $\binom{n+1}{0}a^{n+1}$, et de même $\binom{n}{n}b^{n+1}$ par $\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$, on obtient bien la relation au rang $n+1$.

Le principe de récurrence permet de conclure.

Exemples :

- Pour $n = 2$, on obtient la relation bien connue $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- Pour $n = 3$, on retrouve une formule souvent rencontrée dans les exercices : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- En remplaçant b par $-b$, on obtient :

$$(a-b)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}(-b)^p = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$$

relation facile à retenir si l'on remarque que les signes devant chaque monôme alternent. Par exemple :

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

Ces relations sont souvent utiles, non seulement pour développer rapidement des puissances, mais aussi pour démontrer des relations portant sur les coefficients du binôme, donnant ainsi une troisième source de démonstrations.

Exemples :

- Pour $a = b = 1$, on obtient $2^n = (1+1)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^{n-p} 1^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$.

  À titre d'exercice, vous pouvez retrouver une interprétation ensembliste de cette relation. Il s'agit de compter les parties d'un ensemble à n éléments, en les regroupant selon leurs cardinaux.

- Pour $a = 1$ et $b = -1$, on obtient $0 = (1-1)^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p}$.

Exercices :

- En partant de $f(x) = (1+x)^n$, démontrer que $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

- Existe-t-il trois coefficients binomiaux consécutifs sur une même ligne du triangle de Pascal qui soient en progression arithmétique ?

  Pour les trouver, il suffit d'utiliser la relation $2\binom{n}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p+1}$, et de résoudre l'équation du second degré en p en résultant.

- Exercices 27 à 29 p.248.

- Exercice 46 p.251 : retrouver le résultat en trouvant une relation de récurrence vérifiée par A_n.

- Des exercices de révision : A TERMINER.

CHAPITRE VI

La continuité et le théorème des valeurs intermédiaires

Sommaire

I Continuité **44**

A Continuité en un point 44

B Continuité sur un intervalle 44

C Théorèmes relatifs à la continuité 44

II Applications de la continuité **46**

A Le théorème des valeurs intermédiaires 46

B Fonction continue strictement monotone sur un intervalle 46

C Bijection 47

I Continuité

A Continuité en un point

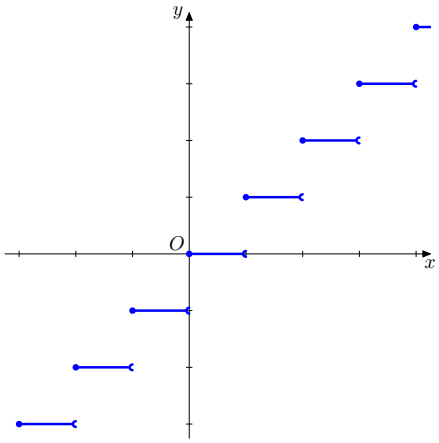
Définition 7 : *Soit f une fonction définie (au moins) sur un intervalle I, et a un point de I.*
On dit que f est continue *en a si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Cette définition peut sembler en légère contradiction avec ce qui a été dit dans le cours sur les limites. En effet, on y a vu que si f est définie en a et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, alors $l = f(a)$.

Mais il faut bien se rappeler que dire $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ signifie *d'abord* que cette limite existe, ce qui n'est pas toujours le cas.

Exemple : Voici un exemple classique de fonction non continue : la fonction *partie entière* Ent. Par définition :

$$\text{Ent}(x) = \text{ le plus grand entier inférieur ou égal à } x$$



On peut voir que cette fonction n'est pas continue en tout x entier relatif. En effet, pour $n \in \mathbb{Z}$ donné :

$$\lim_{x \to n^-} \text{Ent}(x) = n - 1 \quad \text{alors que} \quad \lim_{x \to n^+} \text{Ent}(x) = n$$

Graphiquement, on voit que la courbe présente des "sauts" aux points d'abscisses entières.

B Continuité sur un intervalle

Définition 8 : *Soit f une fonction définie (au moins) sur un intervalle I. On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.*

Une conséquence graphique de la continuité : la courbe représentative d'une fonction continue sur un intervalle est en un seul morceau. On doit la tracer *sans lever le crayon.* On verra une conséquence fondamentale de cette propriété dans la suite de ce cours.

C Théorèmes relatifs à la continuité

1 Continuité et dérivabilité

Théorème 15

- Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
- Si f est dérivable sur l'intervalle I, alors f est continue sur I.

Preuve (ROC)

Il suffit de démontrer le premier point.

Notons, pour $x \neq a$, $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. On sait que la dérivabilité de f en a équivaut à l'existence d'une limite finie en a, limite appelée par définition nombre dérivé de f en a et notée $f'(a)$.

On a donc, pour tout $x \neq a$, $f(x) = f(a) + (x - a)\, g(x)$. De $\lim\limits_{x \to a} x - a = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = f'(a)$, on tire bien $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

2 Opérations usuelles sur les fonctions continues

Les théorèmes relatifs aux opérations sur les limites se traduisent immédiatement en théorème relatifs à la continuité.

Théorème 16

Si f et g sont continues en a, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + g$ et $f \times g$ sont continues en a. Si de plus g ne s'annule pas en a, $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

Enfin, si f est continue en a, si g est continue en b et si $f(a) = b$, alors $g \circ f$ est continue en a. ★

Ce théorème et le précédent permettent de construire de nombreuses familles de fonctions continues :

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- Les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$.

Exercices :

- Démontrer les assertions précédentes. Partir de la démonstration de la continuité sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x$.

  Seul le dernier point pose problème. En effet, la fonction racine est dérivable seulement sur $]0; +\infty[$. Mais il est facile de démontrer qu'elle est continue sur l'intervalle fermé, en montrant que $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$.

  En effet, $\left|\sqrt{x} - 0\right| < \varepsilon$ équivaut à $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon^2 = \alpha$, donc $\sqrt{x}$ peut être rendu aussi proche de 0 que voulu, ce qui est la définition de $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$.

- Trouver les ensembles sur lesquels les fonctions suivantes sont continues :

  $$f : x \mapsto \sin^3 x - 3\frac{\sin x}{x}, \qquad g : x \mapsto \frac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{x^2 + 1}, \qquad h : x \mapsto 4\,(x - \mathrm{Ent}\,(x))\,(1 - x + \mathrm{Ent}\,(x)) \text{ (pour les forts !)}$$

  - f est définie sur $\mathbb{R}^*$. La fonction sin est continue sur $I_1 =]0; +\infty[$ et $I_2 =]-\infty; 0[$, et la fonction $x \mapsto x^3$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc leur composée est aussi continue sur I_1 et I_2.

    De plus $x \mapsto x$ est continue sur I_1 et I_2 et ne s'y annule pas, donc $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est continue sur I_1 et I_2.

    Ainsi, f est continue sur chacun des intervalles I_1 et I_2.

    Remarquons que si f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$, son graphe est très proche de celui d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$. En fait, en ajoutant la valeur $f(0) = 0$, on obtient une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. On dit qu'on a *prolongé f par continuité* en 0. Tout se passe comme si on avait enlevé au graphe d'une fonction continue l'un de ses points, pour la rendre discontinue en ce point.

  - $x^4 + x^2 + 1 = \left(x^2 + 1/2\right)^2 + 3/4$, cette fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$ et ne prend que des valeurs positives ou nulles. $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que leur composée, qui est le numérateur de g, est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

    Le dénominateur est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et ne s'y annule pas. Leur quotient g est donc continu sur $\mathbb{R}$.

– Cette fonction semble bien compliquée. Essayons de simplifier son étude.

Ent est constante sur tout intervalle de la forme $]n, n+1[$, avec $n \in \mathbb{Z}$, et y est donc continue. Plus précisément, cette fonction est continue en tout point d'abscisse n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$, et il en est donc de même de h. Les seuls problèmes interviennent donc aux points d'abscisse entière.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Sur $[n-1, n[$, on vérifie que $\mathrm{Ent}\,(\mathrm{x}) = n-1$, donc

$$(\forall x \in [n-1, n[) \;\; h(x) = 4(x-(n-1))(1-x+(n-1)) = 4(x-n+1)(n-x)$$

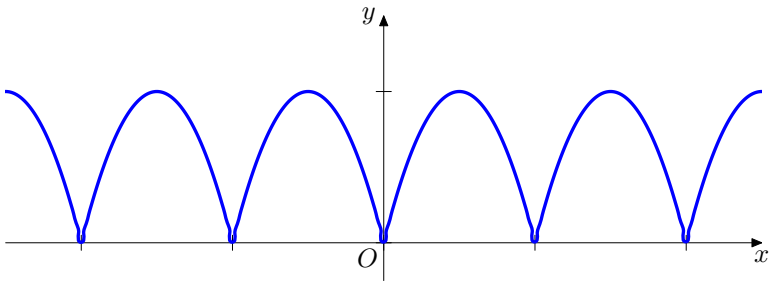
donc $\lim\limits_{x \to n^-} h(x) = \lim\limits_{x \to n^-} 4(x-n+1)(n-x) = 0$. De même

$$(\forall x \in [n, n+1[) \;\; h(x) = 4(x-n)(1-x+n)$$

donc $\lim\limits_{x \to n^+} h(x) = \lim\limits_{x \to n^+} 4(x-n)(1-x+n) = 0$.

Ainsi, h est continue en n, et ce pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Finalement, bien que construite à partir de la fonction Ent qui est loin d'être continue, h est continue sur $\mathbb{R}$.

Une remarque : on aurait pu simplifier l'étude de h en remarquant que celle-ci est 1 périodique. On peut donc se contenter d'une étude sur un intervalle d'amplitude 1.



II Applications de la continuité

On a vu dans la première partie une conséquence graphique de la notion de continuité sur un intervalle. Nous allons traduire cette notion intuitive sous la forme d'un théorème fort utile en analyse.

A Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 17

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I tels que $a < b$. Soit encore f une fonction continue sur I. Si λ est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in I$ tel que $f(c) = \lambda$. ★

Nous connaissions déjà ce théorème, mais il demandait des hypothèses plus fortes puisqu'on imposait la dérivabilité de la fonction. En fait, on n'a besoin que de la continuité. La démonstration viendra plus tard, au moment où on étudiera les suites.

Les applications sont innombrables, la feuille d'exercices vous a déjà montré quelques exemples.

Exercices :
Les exercices 36 à 39 p.46, ainsi que les exercices 74 à 79 p.50 font étudier des fonctions et donnent des exemples d'application du TVI. Il n'est évidemment pas nécessaire de les traiter tous.

D'autre part, l'exercice 85 est tout à fait classique et doit être considéré comme incontournable.

B Fonction continue strictement monotone sur un intervalle

Théorème 18

Si f est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $I = [a; b]$, l'image de l'intervalle I par f est $[f(a); f(b)]$, et tout réel de cet intervalle est atteint une unique fois (autrement dit pour tout $\lambda \in [f(a); f(b)]$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution.

On dit que f réalise une *bijection* de l'intervalle $[a; b]$ dans l'intervalle $[f(a); f(b)]$.

Preuve *La stricte croissance de f assure que $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$ pour tout $x \in [a, b]$.*

La continuité assure l'existence de solutions pour chaque équation $f(x) = \lambda$, la stricte croissance assure l'unicité.

On peut citer un théorème plus général, mais moins facile à énoncer clairement :

Théorème 19

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I (borné ou non). Notons λ et μ les limites de f aux extrémités de l'intervalle I (λ et μ désignant des réels, $+\infty$ ou $-\infty$).

Alors l'image de I par f est un intervalle d'extrémités λ et μ (incluses ou exclues selon la nature de l'intervalle I), et pour tout réel k compris entre λ et μ, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution. ★

Si par exemple $I =]-\infty, b]$, si $\lim\limits_{x \to -\infty} = \lambda$ et si $\mu = f(b)$, et si f est strictement décroissante sur l'intervalle I, alors l'image de I par f est $[\mu, \lambda[$.

Tout cela est bien plus clair sur un dessin.

On retiendra en particulier que l'image par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle (attention : réciproque fausse !).

C Bijection

Si f vérifie les hypothèses du théorème précédent, on dit que f réalise une *bijection* de I sur $J = f(I)$. Ceci permet de définir une application g, de J dans I, de la façon suivante : pour tout $x \in J$, $g(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = x$.

On a ainsi : pour tout $x \in I$, $g(f(x)) = x$, et pour tout $y \in J$, $f(g(y)) = y$.

On dit que g est la *fonction réciproque* de f, et que f et g sont des *bijections réciproques*. L'étude des propriétés de cette fonction réciproque n'est pas au programme. On peut démontrer que g a le même sens de variation que f, et que g est continue sur J (ce qui n'est pas tout à fait évident).

Exemples :

- Les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ sont réciproques l'une de l'autre (attention, il ne faut pas considérer la fonction f sur $\mathbb{R}$ tout entier !).

- La restriction de la fonction sin à l'intervalle $[-\pi/2; +\pi/2]$ est continue, strictement monotone, et a pour image l'intervalle $[-1; 1]$. Ceci permet de définir une fonction réciproque, de l'intervalle $[-1; 1]$ dans $\mathbb{R}$. Cette fonction s'appelle la fonction *arcsinus*, se note arcsin, et correspond à la touche `asin` ou $\texttt{sin}^{-1}$ sur votre calculette.

  Cherchez par vous-même des fonctions réciproques pour les fonctions cos et tan (ou pour leurs restrictions à des intervalles convenables !).

- Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

  Il est assez facile de vérifier que la restriction de f à l'intervalle $I =]1; +\infty[$ est continue et strictement décroissante. On a $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$. f réalise donc une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J =]2; +\infty[$.

  Cherchons une expression de la fonction réciproque g.

  Dire que $y = g(x)$ revient à dire que $x = f(y) = \dfrac{2y+1}{y-1}$. Il s'agit donc de résoudre une équation d'inconnue y :

  $$x = \frac{2y+1}{y-1} \iff x(y-1) = 2y+1 \iff y(x-2) = 1+x \iff y = \frac{1+x}{x-2}$$

  Tracez les courbes représentatives de ces deux fonctions dans un même repère. Vous devriez constater (et cela n'est pas difficile à interpréter) qu'elles sont symétriques par rapport à la première diagonale.

CHAPITRE VII

Produit scalaire dans le plan et l'espace

Sommaire

I Rappels sur le produit scalaire dans le plan . . . 50
- A Définitions . . . 50
- B Propriétés . . . 50
- C Un complément : distance d'un point à une droite . . . 51

II Produit scalaire dans l'espace . . . 51
- A Définition . . . 51
- B Propriétés . . . 52

III Orthogonalité dans l'espace . . . 52
- A Vecteurs orthogonaux . . . 52
- B Vecteur normal à un plan . . . 53

IV Applications . . . 54
- A Équations de plans . . . 54
- B Distance d'un point à un plan . . . 54
- C Plan médiateur . . . 55
- D Équations de sphères . . . 55

I Rappels sur le produit scalaire dans le plan

A Définitions

On a vu dans le cours de première un certain nombre de définitions équivalentes du produit scalaire de deux vecteurs. Rappelons les :

Avec des normes : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \quad (1)$$

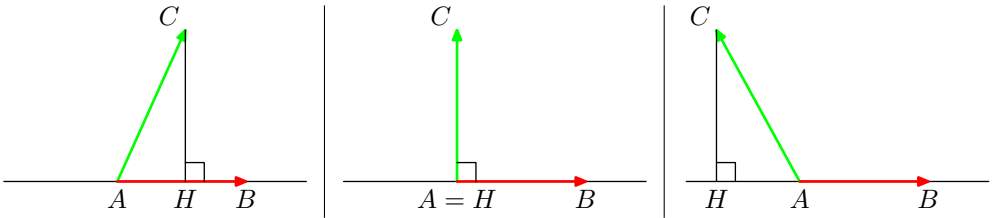
Avec le cosinus : pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$,

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \quad (2)$$

Avec une projection orthogonale : si $A \neq B$ et si H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$$

Cette propriété ne constitue pas à proprement parler une définition du produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, il faut la compléter en indiquant de quelle manière calculer le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires. Ceci est illustré ci-dessous :



si $H \in]AB)$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH > 0$ | si $H = A$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ | si $H \notin [AB)$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH < 0$

Avec des coordonnées en repère orthonormé : si $\vec{u}\,(x;y)$ et $\vec{v}\,(x';y')$ dans un repère orthonormé du plan, alors

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' \quad (3)$$

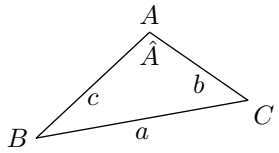
Ce résultat ne dépend bien entendu pas du repère choisi.

B Propriétés

Rappelons quelques propriétés et applications importantes de cette notion :

- Le produit scalaire est commutatif : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.
- Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition vectorielle : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$.
- Le produit scalaire est compatible avec le produit d'un scalaire par un vecteur : $(a\vec{u}).(b\vec{v}) = ab\,(\vec{u}.\vec{v})$.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si[1] $\vec{u}.\vec{v} = 0$. Donc, en repère orthonormé, $\vec{u}\,(x;y)$ et $\vec{v}\,(x';y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.
- Une conséquence du produit scalaire : la *formule d'Al Kashi* : dans le triangle ABC, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$



[1] Attention donc à la bêtise consistant à écrire : « $\vec{u}.\vec{v} = 0$, donc $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ » ! De même, $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w}$ n'entraîne pas $\vec{v} = \vec{w}$, mais $\vec{u}.(\vec{v}-\vec{w}) = 0$, et donc $\vec{u}$ et $\vec{v}-\vec{w}$ orthogonaux.

C Un complément : distance d'un point à une droite

Rappel : Dans un repère orthonormé, si d a pour équation $ax + by + c = 0$, alors $\vec{n}(a, b)$ est un *vecteur normal* à d, et $\vec{u}(-b, a)$ en est un *vecteur directeur*.

Théorème 20
Dans un repère orthonormé, la distance d'un point $A(\alpha, \beta)$ à la droite d d'équation $ax + by + c = 0$ est égale à

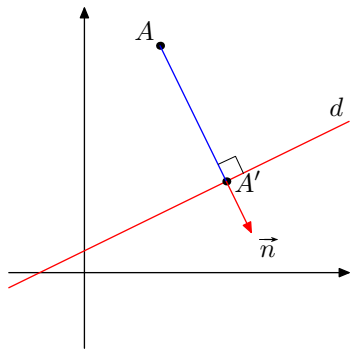
$$d(A, d) = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Preuve *:*
Soit A' le projeté orthogonal de A sur la droite d, et (α', β') ses coordonnées. Par définition, $d(A, d) = AA'$.
Le vecteur $\vec{n}(a, b)$ est normal à la droite d, et $\overrightarrow{A'A}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, donc $\left|\overrightarrow{A'A}.\vec{n}\right| = \|\vec{n}\| AA'$.
Les coordonnées de $\overrightarrow{A'A}$ sont $(\alpha - \alpha', \beta - \beta')$, donc :

$$|(\alpha - \alpha').a + (\beta - \beta').b| = \sqrt{a^2 + b^2}.AA'$$

Or A' est un point de d, donc $a\alpha' + b\beta' = -c$, d'où finalement :

$$AA' = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Remarque : la démonstration de ce théorème ne nécessite pas le calcul des coordonnées de A'.

Exercices :

- Dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit $d : 2x - 3y = 6$, et $A(5, 5)$. Trouver les coordonnées du projeté orthogonal A' de A sur d, en déduire la distance de A à d.

  Retrouver cette distance à l'aide du théorème.

- Dans un repère orthonormé, si d a pour équation $ax + by + c = 0$, que représente $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$?

- Les exercices 1 à 7 p.394 permettent de revoir ces notions. En particulier, nous corrigerons les exercices 3 à 7.

II Produit scalaire dans l'espace

A Définition

On peut facilement étendre la définition du produit scalaire de deux vecteurs dans le plan au cas de deux vecteurs de l'espace. En effet, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace, il existe trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient des représentants respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

A, B et C sont bien entendu coplanaires. Notons $\mathscr{P}$ le plan (ABC).

Définition 9 : *Par définition, le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté encore $\vec{u}.\vec{v}$, est le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan $\mathscr{P}$.*

Il n'est pas tout à fait évident de montrer, et nous l'admettrons, que cette définition est indépendante des représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et donc du plan $\mathscr{P}$.

Ceci nous permet de donner plusieurs définitions équivalentes du produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$;

- si α est une mesure de l'angle[2] $(\vec{u}, \vec{v})$, $\vec{u}.\vec{v} = \|u\| \times \|v\| \times \cos\alpha$;
- si A et B sont distincts, et si C est un point quelconque de l'espace, considérons le point H intersection de (AB) et du plan perpendiculaire à (AB) passant par C ; H est le *projeté orthogonal* de C sur (AB) ; alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.

La définition en termes de coordonnées n'est pas directement transposable, mais on a une petite idée du résultat. Il nous faut l'expression de la norme d'un vecteur dans un repère orthonormé.

Définition 10 : *Si, dans un repère orthonormé, $\vec{u}\,(x;y;z)$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.*

On en déduit :

Propriété 6
Si, dans un repère orthonormé, $\vec{u}\,(x;y;z)$ et $\vec{v}\,(x';y';z')$, alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Preuve *On a $\|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2+z^2$, $\|\vec{v}\|^2 = x'^2+y'^2+z'^2$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (x+x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2$, donc :*

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= \frac{1}{2}\left[\left(x^2+2xx'+x'^2\right)+\left(y^2+2yy'+y'^2\right)+\left(z^2+2zz'+z'^2\right)-\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[2xx'+2yy'+2zz'\right] = xx'+yy'+zz'\end{aligned}$$

B Propriétés

Ce produit scalaire dans l'espace a les mêmes propriétés que le produit scalaire dans le plan :

- symétrie : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- bilinéarité : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$, et les relations symétriques.
- identités remarquables :

$$\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})^2 &= \|u\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|v\|^2\\ (\vec{u}-\vec{v})^2 &= \|u\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|v\|^2\\ (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) &= \|u\|^2 - \|v\|^2\end{aligned}$$

Exercice : Les exercices 8 à 14 p.394 proposent des exemples de calculs de produits scalaires.

III Orthogonalité dans l'espace

A Vecteurs orthogonaux

Définition 11 : *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont* orthogonaux *si et seulement si l'un des deux vecteurs est nul, ou si les directions des deux vecteurs sont perpendiculaires.*

Théorème 21
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Preuve *Deux vecteurs sont toujours coplanaires, donc c'est une simple conséquence du cours de première S.*

Rappelons la démonstration : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ (c'est le célèbre théorème de Pythagore !).

[2] non orienté ! en effet, quelques expérimentations vous convaincrons qu'il n'est pas possible d'orienter des angles dans l'espace.

Or on a par définition $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$. *Donc* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *orthogonaux équivaut encore à* $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Exercices :

- Les exercices 15 à 20, 23 et 24 p.395 permettent de pratiquer cette notion.

- Exercices 35, 37, 44 p.397-398.

B Vecteur normal à un plan

Dans ce qui suit, on dira que $\vec{u}$ est un vecteur du plan (P) s'il existe deux points A et B de (P) tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ (autrement dit, $\vec{u}$ appartient à la *direction* du plan (P)).

Définition 12 : *Un vecteur* $\vec{n}$ *est dit* normal *au plan* (P) *si et seulement si il est non nul et orthogonal à tout vecteur de* (P).

Deux vecteurs non colinéaires d'un plan constituant une base de ce plan, on a la propriété suivante :

Propriété 7
Pour qu'un vecteur $\vec{n}$ soit normal au plan (P), il faut et il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (P).

Preuve *En effet, la condition est clairement nécessaire (qui peut le plus peut le moins).*

Réciproquement, si $\vec{n}$ *est orthogonal à deux vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *de* (P)*, tout vecteur* $\vec{w}$ *de* (P) *peut s'écrire (et ce de façon unique, mais ça n'est pas le propos ici) sous la forme* $a\vec{u} + b\vec{v}$ *(*$(a;b)$ *est alors le couple de coordonnées de* $\vec{w}$ *dans la base* $(\vec{u}, \vec{v})$*).*

On a alors : $\vec{n}.\vec{w} = \vec{n}.(a\vec{u} + b\vec{v}) = a\vec{n}.\vec{u} + b\vec{n}.\vec{v} = 0$*, donc vvn est bien orthogonal à* $\vec{w}$.

Remarques :

- Il existe une infinité de vecteurs normaux à un plan, ils sont tous colinéaires entre eux.

- Deux plans sont parallèles si et seulement si ils admettent des vecteurs normaux colinéaires.

- Une droite (D) est orthogonale au plan (P) si et seulement si tout vecteur directeur de (D) est normal au plan (P) (en fait, il suffit qu'*un* vecteur directeur de (D) soit normal à (P)).

- Deux plans sont *perpendiculaires* si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux. Attention à la non unicité : il y a une infinité de plans perpendiculaires à un plan donné passant par un point. Par contre, si une droite D n'est pas orthogonale à un plan P, il existe un unique plan π contenant D et perpendiculaire à P.

  Preuve *Soit* $\vec{n}$ *un vecteur normal au plan* P*, et* $\vec{u}$ *un vecteur directeur de* D*. Par hypothèse,* $\vec{n}$ *et* $\vec{u}$ *ne sont pas colinéaires. Si* A *est un point quelconque de* D*, le plan* π *ne peut être que le plan passant par* A *et dirigé par* $\vec{n}$ *et* $\vec{u}$.

  Remarquons que cette unicité tombe en défaut lorsque D *est orthogonale à* P *(auquel cas* $\vec{n}$ *et* $\vec{u}$ *sont colinéaires).*

Exercice : 21 et 22 p.395.

IV Applications

A Équations de plans

Théorème 22
Soit A un point, et $\vec{n}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est le plan normal à $\vec{n}$ passant par A.

Preuve *C'est à peu près évident : dire que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ revient à dire que la droite (AM) est orthogonale à la droite D passant par A dirigée par $\vec{n}$, soit que M appartient au plan orthogonal à D passant par A.*

Ceci va nous permettre d'obtenir la caractérisation d'un plan par les coordonnées de ses points.

Théorème 23
Dans un repère orthonormal, tout plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\,(a;b;c)$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ (avec a, b et c non tous les trois nuls).

Réciproquement, si a, b, c, d sont quatre réels, a, b et c étant non tous les trois nuls, l'ensemble des points $M\,(x;y;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\,(a;b;c)$.

Preuve *On vient de voir que, si $A\,(x_0;y_0;z_0)$ est un point du plan $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points $M\,(x;y;z)$ tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$, soit :*

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0 \iff ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$$

qui est bien de la forme annoncée.

Réciproquement, si $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points $M\,(x;y;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, soit $(x_0;y_0;z_0)$ un triplet de solution de cette équation (c'est toujours possible d'en trouver au moins un : si par exemple $a \neq 0$, prendre $x_0 = -\frac{d}{a}$, $y_0 = z_0 = 0$). Ainsi, on a $d = -\,(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

Notons A le point de coordonnées $(x_0;y_0;z_0)$, et $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (a, b, c). L'équation devient :

$$ax + by + cz + d = 0 \iff ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0 \iff \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$$

$\mathscr{P}$ est donc le plan normal à $\vec{n}$ passant par A.

Remarque : Une telle équation n'est pas unique : si $\mathscr{P}$ a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, alors les équations de $\mathscr{P}$ sont toutes de la forme $kax + kby + kcz + kd = 0$, avec $k \neq 0$.

Exercices :
- Exercices 25 à 29 p.395 pour pratiquer les équations de plans.
- Exercice 31 p.296 : équations de plans perpendiculaires.

B Distance d'un point à un plan

Comme dans le plan, on a une relation donnant la distance d'un point à une droite dans l'espace :

Théorème 24
Dans un repère orthonormé, la distance du point $A\,(x_0;y_0;z_0)$ au plan (P) d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est :

$$d\,(A,(P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Preuve *elle est similaire à celle dans le plan : on note $A'\,(x';y';z')$ le projeté orthogonal de A su (P). Par définition, $d\,(A,(P)) = AA'$.*

Le vecteur $\vec{n}\,(a;b;c)$ est un vecteur normal au plan (P). Il est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{A'A}$, donc $\left|\overrightarrow{A'A}.\vec{n}\right| =$

$\|\vec{n}\|\, AA'$. *Ainsi :*

$$d\left(A,(P)\right) = AA' = \frac{a\left(x_0 - x'\right) + b\left(y_0 - y'\right) + c\left(z_0 - z'\right)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

puisque, A' appartenant au plan (P), on a $ax' + by' + cz' = -d$.

Exercices :

- Exercice 30 p.395 pour s'entraîner.
- Exercices 40 p.397, 42 p.398.

C Plan médiateur

Théorème 25

L'ensemble des points équidistants de deux points distincts A et B est le plan orthogonal à (AB) passant par le milieu de $[AB]$.

Preuve *dire que $MA = MB$ revient à dire que $\overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{MB}^2$, soit, en faisant intervenir le point I, milieu de $[AB]$:*

$$\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = 0 \iff \left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}\right).\left(2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) = 0 \iff 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI} = 0$$

Ainsi, l'ensemble des points M équidistants de A et B est le plan de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ passant par I.

Exercice : 49 p.399.

D Équations de sphères

Théorème 26

En repère orthonormé, la sphère de centre $\Omega\left(x_0; y_0; z_0\right)$ et de rayon R a pour équation

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 + \left(z - z_0\right)^2 = R^2$$

Réciproquement, toute équation de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

est l'équation d'une sphère (éventuellement réduite à un point ou totalement imaginaire).

Preuve *Tout provient de la caractérisation $\overrightarrow{M\Omega}^2 = R^2$.*

Exercices :

- TD 6 p.393.
- Exercices 50, 53 p.399.

En DM, vous ferez les exercices 45 p.398, 56 p.399 et 67 p.401.

CHAPITRE VIII

Dérivation, primitives d'une fonction

Sommaire

I Rappels de première S . . . 58

II Compléments . . . 59

A Dérivation d'une fonction composée . . . 59

B Dérivées successives . . . 60

C Demi-tangentes, tangentes verticales . . . 61

III TP : étude de la fonction tangente . . . 62

IV Primitives d'une fonction . . . 63

A Définition . . . 63

B Calcul de primitives . . . 64

I Rappels de première S

On ne va pas ici refaire l'ensemble du cours de première. On va juste fournir quelques compléments et approfondir certains points.

Théorème 27 (Développement limité d'ordre 1)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in I$. La dérivabilité de f en a équivaut à la possibilité d'écrire une relation de la forme :

$$f(x) = f(a) + k(x-a) + (x-a)\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

Preuve *:*

- ***Condition suffisante*** *: si une telle écriture est possible, on a :*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = k + \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} k$$

ce qui montre que f est dérivable en a, et admet k pur nombre dérivé en a.

- ***Condition nécessaire*** *: si f est dérivable en a, on a :*

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

Cette écriture s'appelle le *développement limité d'ordre* 1 de f en a. Elle sera utile dans certains calculs de limite.

Remarques :

- On peut voir ce développement limité sous l'angle de *l'approximation affine de f en a* : c'est $h \mapsto f(a) + hf'(a)$. C'est la première partie du développement limité, dans laquelle on a posé $h = x - a$.
- Remarquons aussi que $y = f(a) + (x-a)f'(a)$ est l'équation de la *tangente à $\mathscr{C}_f$ en a.*

Exemple : Soit à calculer la limite lorsque x tend vers 0 de $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{sinx}$. Écrivons les développements limités de $\sin x$ et $\cos x$:

$$\cos x = \cos 0 + x\cos'(0) + x\varepsilon_1(x) = 1 + x\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \sin x = \sin 0 + x\sin'(0) + x\varepsilon_2(x) = x + x\varepsilon_2(x)$$

donc :

$$f(x) = \frac{x\varepsilon_1(x)}{x + x\varepsilon_2(x)} = \frac{\varepsilon_1(x)}{1 + \varepsilon_2(x)}$$

ce qui montre que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

On aurait pu aussi constater (et c'est d'ailleurs plus dans l'esprit du programme) que :

$$f(x) = \frac{\frac{\cos x - \cos 0}{x-0}}{\frac{\sin x - \sin 0}{x-0}}$$

et constater qu'on a deux taux de variation dont on connaît les limites.

Enfin, on aurait aussi pu écrire :

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{sinx} = \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = -\tan\frac{x}{2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Théorème 28
Si f est dérivable sur un intervalle I, alors elle y est continue.

Preuve *Elle provient du résultat précédent : en tout point a de I, on a :*

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + (x-a)\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$$

Lorsque x tend vers a, tout ce qui suit $f(a)$ tend vers 0.

Voici quelques exemples de fonctions pour lesquelles la notion de dérivabilité n'est pas complètement évidente :

Exemples :

- La fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$, est dérivable sur $\mathbb{R}$.

  En effet, pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. Et si $x \neq 0$,

  $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x\sin\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

  puisque $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x|$.

  Remarquons cependant que la fonction dérivée f' n'est pas continue en 0. En effet, $\cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

- La fonction $g : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0. En effet,

  $$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

  n'a pas de limite en 0. Cet exemple montre qu'une fonction continue n'est pas forcément dérivable.

Pour terminer cette partie, vous pourrez recopier les tableaux des dérivées usuelles, que vous pouvez trouver dans le livre p.56. Il sera utile de les compléter par les formules sur la dérivée de exp et de $\exp\circ u$, vues plus tôt dans l'année, ainsi que par celle de ln et $\ln\circ u$, que nous verrons plus tard.

On ne rappellera pas tous les bienfaits qu'apporte l'utilisation de la dérivée : étude des variations, recherche d'extrema locaux... Nous verrons de nombreux exemples dans les exercices et autres séances de TD (ainsi bien-sûr que dans les devoirs !).

Exercices :

- Les exercices 1 à 26 p.73 devraient fournir suffisamment d'entraînement pour retrouver tous ses vieux réflexes.

II Compléments

A Dérivation d'une fonction composée

Cette formule généralise celle vue en première[1].

Théorème 29

Soit f définie sur un intervalle J, et u définie sur un intervalle I. On suppose que f et u sont dérivables sur J et I respectivement, et que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$, de sorte que l'on peut considérer la fonction $g = f \circ u$, définie sur I.

Sous ces hypothèses, la fonction g est dérivable sur I, et sa dérivée se calcule ainsi :

$$(\forall x \in I)\ \ g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$$

[1] à moins que votre professeur n'ait été incapable de respecter le programme, et vous ait donné cette formule dès la première... il paraît que certains enseignants ne peuvent s'empêcher de faire du hors programme, comme d'autres font du hors piste !

Preuve *Notons, pour* $a \in I$, $t_a(x) = \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$. *On a :*

$$t_a(x) = \frac{f(u(x)) - f(u(a))}{u(x) - u(a)} \times \frac{u(x) - u(a)}{x - a}$$

D'une part $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{u(x) - u(a)}{x - a} = u'(a)$, *d'autre part, en posant* $X = u(x)$ *:*

$$\frac{f(u(x)) - f(u(a))}{u(x) - u(a)} = \frac{f(X) - f(u(a))}{X - u(a)}$$

et comme $u(x)$ *tend vers* $u(a)$ *lorsque* x *tend vers* a, *cette quantité tend vers* $f'(u(a))$.

Ainsi, on a bien $g'(a) = u'(a) \times f'(u(a))$.

Remarques :

- On retrouve, dans le cas particulier où u est une fonction affine, le résultat du cours de première :

$$(f(ax + b))' = a \times f'(ax + b)$$

- La dérivée de $f \circ u$ n'est donc pas $f' \circ u$, et cela se comprend aisément : le sens de variation de u a certainement son mot à dire dans le sens de variation de la fonction composée.

- Ce facteur u' devra être activement recherché plus tard lorsqu'on souhaitera inverser le procédé, et rechercher les fonctions dont la dérivée est une fonction donnée (voir partie "Primitives").

Exercices :

- Exercices 27 à 35 p.74.

- En cours : exercice 36 p.74.

- Exercices 47 à 49 et 51 p.76.

B Dérivées successives

Définition 13 : *Soit* f *une fonction dérivable sur un intervalle* I. *Si* f' *(appelée dans ce contexte* dérivée première *de* f*) est elle-même dérivable sur* I, *on note* f'' *(ou* $f^{(2)}$*) la fonction dérivée de* f', *elle est appelée* dérivée seconde *de* f *sur* I.

Plus généralement, on définit, sous réserve d'existence, les fonctions dérivées successives de f *par récurrence :*

$$f^{(0)} = f \quad \text{et} \quad (\forall n \geqslant 0) \;\; f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

Exemples :

- En physique, si $f(t)$ désigne la position d'un mobile à l'instant t, $f'(t)$ désigne sa *vitesse instantanée*, et $f''(t)$ *son accélération.*

- On utilise souvent les dérivées successives d'une fonction f lorsque l'étude de la dérivée première f' ne permet pas immédiatement d'en déterminer le signe.

  Soit par exemple à déterminer la position au voisinage de l'origine des courbes représentatives de la fonction sin et de la fonction $f : x \mapsto x - \dfrac{x^3}{6}$.

  On pose $g(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$, et on trouve : $g'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

  Comme on ne sait pas trouver le signe de g', on dérive à nouveau : $g''(x) = -\sin x + x$.

  À ce stade, soit on connaît des choses sur la fonction sin et sa tangente en 0, soit on dérive une dernière fois : $g'''(x) = -\cos x + 1$, et enfin, il est possible de trouver le signe de cette quantité.

Pour finir, on “empile” les tableaux de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'''(x)$		$+$		$+$	
$g''(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On déduit de tout ceci que $x \geqslant \sin x \geqslant x - \dfrac{x^3}{6}$ pour tout $x \in [0; +\infty[$, les inégalités étant retournées sur $]-\infty; 0]$.

Exercices :

- Exercices 37 à 40 p.74.
- Exercices 58 et 59 p.77.

C Demi-tangentes, tangentes verticales

Il se peut qu'une fonction f ne soit pas dérivable en un point d'abscisse a, mais qu'on puisse quand même parler de tangentes en ce point.

Considérons l'exemple du livre : soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{|x|+1}$.

f est clairement dérivable sur $]-\infty; 0[$ (où on a $f(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$) et sur $]0; +\infty[$ (où on a $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$.

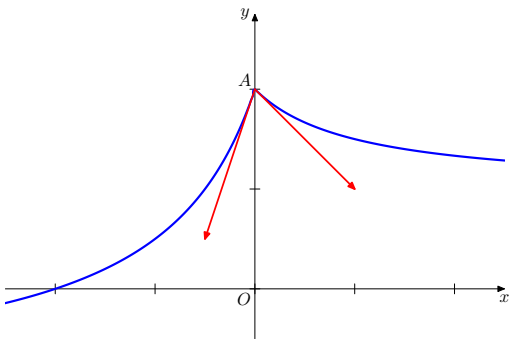
La présence de la valeur absolue au dénominateur oblige à considérer à part la dérivabilité de f en 0. On a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x+2}{|x|+1} - 2}{x} = \begin{cases} \dfrac{\frac{x+2}{x+1} - 2}{x} = \dfrac{-1}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\frac{x+2}{-x+1} - 2}{x} = \dfrac{3}{-x+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donc les limites du taux de variation en 0 à gauche et à droite ne coïncident pas. On appelle alors *nombre dérivé de f à droite (resp. à gauche) en* 0 le nombre

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ (resp. } f'_g(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{)}$$

On a ici $f'_d(0) = -1$ alors que $f'_g(0) = 3$. Ces deux nombres existant, mais étant différents, on dit que le point d'abscisse 0 est *point anguleux* de la courbe. On peut tracer les deux demi-tangentes à la courbe (voir figure plus bas).

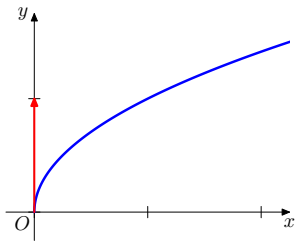


Un autre cas fréquent est celui où la fonction f n'est pas dérivable en a, mais où le taux de variation admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en a. La courbe admet alors une *tangente verticale* au point d'abscisse a.

Un exemple classique est celui de la fonction racine carrée :

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

donc la courbe représentative de la fonction racine admet une demi-tangente verticale à l'origine.



Exercices :

- Exercices 42 p.75, 67 p.79.
- Exercice 80 p.80.

III TP : étude de la fonction tangente

Quelques résultats que vous devriez connaître à propos de la fonction tangente :

- $\boxed{\tan = \dfrac{\sin}{\cos}}$.
- tan est définie partout où cos ne s'annule pas, donc $\boxed{D_{\tan} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[}$.
- cos et sin sont 2π-périodique, donc tan l'est aussi. En fait, on a même mieux : pour tout $x \in \mathbb{D}_{\tan}$:

  $$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

  donc $\boxed{\text{tan est } \pi\text{-périodique}}$. On peut donc limiter son étude à un intervalle d'amplitude π.
- Pour tout $x \in D_{\tan}$,

  $$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

  donc $\boxed{\text{tan est impaire}}$. On peut donc limiter son étude à l'intervalle $I_0 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- sin et cos sont dérivables sur I_0, et cos ne s'y annule pas. Donc $\boxed{\text{tan est dérivable, et donc continue, sur } D_{\tan}}$. On a :

  $$\tan' = \frac{\sin' . \cos - \sin . \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + sin^2}{\cos^2}$$

  Ainsi : $\boxed{\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}}$.
- $\tan 0 = \dfrac{\sin 0}{\cos 0} = 0$, et

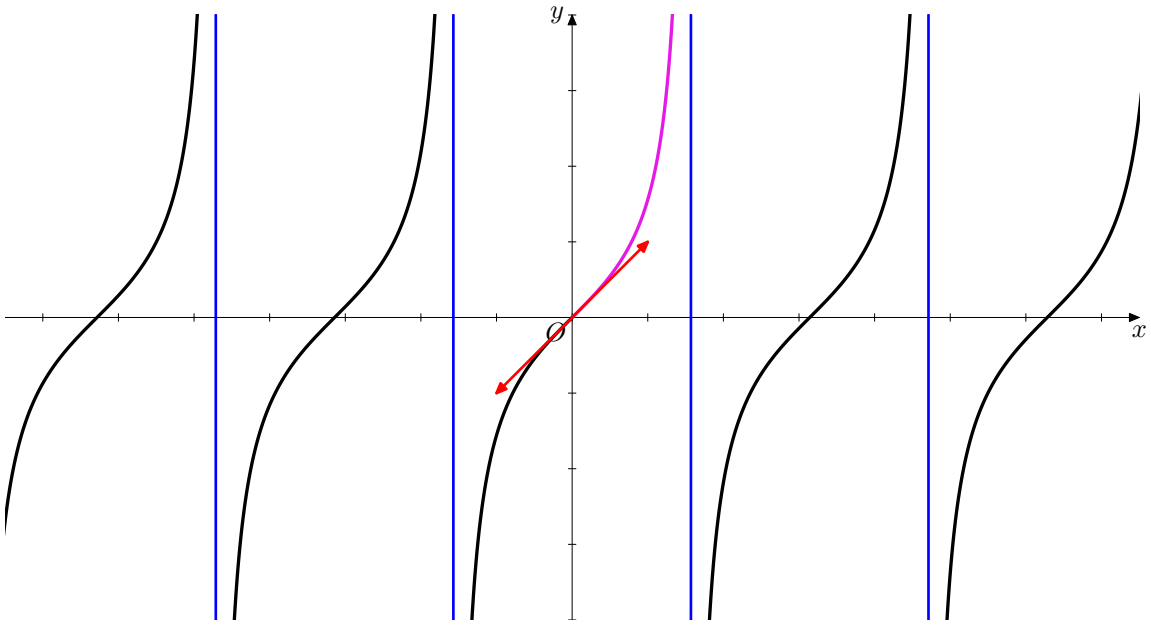
  $$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sin x = 1 \text{ et } \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos x = 0^+ \text{ donc } \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty$$

  La courbe représentative de tan admet donc une asymptote verticale d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

- On déduit de ce qui précède que tan est strictement croissante sur I_0, le tableau de variations de tan est donc :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan'$		$+$	
$\tan$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- On finit par la courbe représentative de tan, avec sa tangente à l'origine :



IV Primitives d'une fonction

A Définition

Définition 14 : *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est* une primitive *de f sur I si F est dérivable sur I, et si $F' = f$.*

Ainsi, pour montrer qu'une fonction F est une primitive de f, il suffit de prouver que F est dérivable, et que $F' = f$ (il n'est en particulier pas nécessaire de trouver toutes les primitives de f).

On va voir qu'en fait, si l'on connaît une primitive de f, on les connaît toutes :

Théorème 30

Soit f une fonction définie sur I. Si F est une primitive de f sur I, alors f admet une infinité de primitives sur I, différant entre elles d'une constante.

> ***Preuve*** *En effet, si F est une primitive de f sur I, et si $G = F + C$, alors $G' = F' = f$, donc G est encore une primitive de f sur I.*
>
> *Réciproquement, si F et G sont deux primitives de f sur I, alors $G - F$ a pour dérivée 0, donc est constante sur l'intervalle I (très important, ici, le fait que I soit un intervalle !).*

On notera donc qu'il est très vilain de parler de *la* primitive de f sur I. Par contre, il est possible de préciser une primitive particulière de f, de la façon suivante :

Théorème 31

Si f admet des primitives sur I, il en existe une et une seule qui prend la valeur y_0 en x_0.

Preuve *Si F est une primitive quelconque de f, toutes les autres sont de la forme $G = F + k$, et*

$$G(x_0) = F(x_0) + k = y_0 \iff k = y_0 - F(x_0)$$

ce qui prouve l'unicité.

Exemple : Trouvons la primitive P de $p(x) = 2x^2 + 3x - 1$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.

On vérifie facilement que $Q(x) = \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} + x$ est une primitive de p sur $\mathbb{R}$, et sa valeur en 1 est $Q(1) = \dfrac{19}{6}$.

On a donc $P(x) = Q(x) - \dfrac{19}{6} = \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} + x - \dfrac{19}{6}$.

Nous admettrons pour l'instant le théorème suivant :

Théorème 32

Toute fonction *continue* sur I admet des primitives sur I. ★

Autrement dit, la continuité est une condition suffisante pour l'existence de primitives.

B Calcul de primitives

Un tableau de primitives usuelles est simplement un tableau de dérivées lu à l'envers. Reproduire ceux de la page 202.

L'utilisation des formules générales est un peu délicat. Noter que lorsqu'on dérive une fonction composée de la forme $f \circ u$, apparaît toujours, en plus de la dérivée de f, celle de u.

Exemples :

- Pour trouver les primitives de $f(x) = (2x+1)^5$, on peut bien-sûr développer, mais cela est peu pratique. Il est plus intéressant d'écrire

  $$f(x) = \frac{1}{2} \times 2(2x+1)^5 = \frac{1}{2}u'(x).u^5(x)$$

  avec $u(x) = 2x + 1$. On trouve alors : $F(x) = \dfrac{1}{12}u^6(x) + k = \dfrac{1}{12}(2x+1)^6 + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

- Pour trouver les primitives de $g(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$, encore une fois, on constate que

  $$g(x) = \frac{3}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{3}{2}\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \text{ avec } u(x) = x^2 + 1$$

  d'où $G(x) = 3\sqrt{u(x)} + k = 3\sqrt{x^2+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercices :

- Les exercices 16 à 37 p.215-216 fournissent beaucoup d'exemples pour s'entraîner.
- Pour les gourmands, il n'est pas inutile de jeter un oeil sur les exercices 59 et 60 p.218, ainsi que sur les exercices 62 à 88 p.220-221. Nous essayerons d'en corriger un maximum.

ANNEXE A

Index