Corrigé de la préparation du devoir du 30 septembre 2008

I a) $\left(\dfrac{3+i}{1-2i}\right)^2 = \left(\dfrac{(3+i)(1+2i)}{5}\right)^2 = \dfrac{(1+7i)^2}{25} = \dfrac{-48+14i}{25}$.

b) $\frac{1}{2}$ est valeur impossible. L'équation est alors équivalente à :

$$z+i = 2i(2z-1) \iff z(1-4i) = -3i \iff z = \frac{-3i}{1-4i} = \frac{-3i(1+4i)}{17} = \frac{12-3i}{17}$$

c) Ici encore $\frac{1}{2}$ est valeur impossible. L'équation équivaut (dans $\mathbb{C}\setminus\{1/2\}$) à $z+i = 2i(2\overline{z}-1)$.
En conjuguant, on obtient :

$$\begin{cases} z - 4i\overline{z} = -3i \\ 4iz + \overline{z} = 3i \end{cases} \iff \begin{cases} -15z = -12-3i \\ 4iz + \overline{z} = 3i \end{cases}$$

(On a ajouté à la première équation $4i$ fois la seconde, pour éliminer les $\overline{z}$). On obtient donc : $z = \dfrac{12+3i}{15} = \dfrac{4+i}{5}$.

II 1°) Les nombres z, iz, $\overline{z}$, $-z$ et $-iz$ ont tous le même module, l'équation revient donc à $5|z| = 45$, soit $|z| = 9$ (*réponse e)*).

2°) La seule qui est réelle est (*réponse b)*).

$$(z+i\overline{z})(\overline{z}+iz) = 2z\overline{z} + i\overline{z}^2 - iz^2 = 2|z|^2 - i\left(z^2 - \overline{z^2}\right) = 2|z|^2 + 2\mathrm{Im}\left(z^2\right)$$

3°) Écrivons $z = x+iy$. La relation devient :

$$\left|z^2\right| + x + iy - 6i = x - iy + 13 \iff |z|^2 - 13 + i(2y-6) = 0$$

Ce nombre est nul si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont nulles, soit : $|z|^2 - 13 = 0$ et $2y-6 = 0$.
On en déduit que $|z| = \sqrt{13}$ (*réponse c)*), et pour le même prix $\mathrm{Im}(z) = 3$, donc $\mathrm{Re}(z) = \pm 2$!

III Pour la question de cours, je vous suggère d'aller voir... votre cours !

IV 1°) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, donc $x-1 \leqslant x - \cos x \leqslant x+1$.
De $f(x) \geqslant x-1$, et de $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$, le théorème d'encadrement nous permet de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Pour la limite en $-\infty$, il suffit de considérer l'autre partie de l'encadrement : $f(x) \leqslant x+1$, et de raisonner comme précédemment : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

c) f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f(0) = -1 < 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$.
Un théorème de première nous permet alors de conclure que l'équation $f(x) = 0$ a une solution (au moins) sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
De $f'(x) = 1 + \sin x \geqslant 0$, on déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui garantit l'unicité de la solution de l'équation précédente, que l'on peut donc appeler α.
On obtient une valeur approchée de α par des encadrement successifs. On obtient : $0{,}73 < \alpha < 0{,}74$.

2°) a) Par le même encadrement que ci-dessus, et pourvu que le dénominateur ne s'annule pas (ce qui est certainement le cas sur l'intervalle $[2; +\infty[$), on a bien $\dfrac{1}{x+1} \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{1}{x-1}$.

b) Comme on disait plus haut, pour le cours...

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$, donc d'après le théorème d'encadrement g admet une limite en $+\infty$, et celle-ci est 0.
On en déduit que la courbe représentative de g admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$ (l'axe des abscisses, quoi...).

d) Sur l'intervalle $]\alpha; +\infty[$, $x - \cos x$ reste positif, donc tend vers 0 en α par valeurs positives.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to\alpha^+} g(x) = +\infty$, et donc que la courbe représentative de g admet une asymptote verticale d'équation $x = \alpha$.

V 1°) a) $\lim_{x\to+\infty} 4x^2-4x+3 = \lim_{x\to+\infty} 4x^2 = +\infty$, et $\lim_{t\to+\infty} \sqrt{t} = +\infty$, donc par le théorème de composition, $\lim_{x\to+\infty} f(t) = +\infty$.

b) Un petit calcul s'impose :

$$f(x)-(2x-1) = \sqrt{4x^2-4x+3}-(2x-1) = \frac{\left(4x^2-4x+3\right)-(2x-1)^2}{\sqrt{4x^2-4x+3}+(2x-1)} = \frac{2}{x\left(\sqrt{4-4/x+3/x^2}+(2-1/x)\right)}$$

dont on déduit facilement que $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)=0$, et donc que la droite Δ d'équation $y=2x-1$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

2°) a) De même, $\lim_{x\to-\infty} 4x^2-4x+3 = \lim_{x\to-\infty} 4x^2 = +\infty$, donc $\lim_{x\to-\infty} f(t) = +\infty$.

b) Attention aux bêtises !

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{4x^2-4x+3}}{x} = \frac{|x|\sqrt{4-4/x+3/x^2}}{x}$$

Lorsque x tend vers $-\infty$, x est certainement négatif, donc $|x|=-x$. Ainsi :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$$

On calcule maintenant $f(x)+2x$, en procédant comme ci-dessus :

$$f(x)+2x = \sqrt{4x^2-4x+3}+2x = \frac{\left(4x^2-4x+3\right)-4x^2}{\sqrt{4x^2-4x+3}-2x} = \frac{-4x+3}{-x\left(\sqrt{4-4/x+3/x^2}+2\right)} = \frac{4-3/x}{\sqrt{4-4/x+3/x^2}+2}$$

Le dénominateur de cette dernière fraction tend vers 4, son numérateur vers 4, donc la droite Δ' d'équation $y=-2x+1$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.