DS n°1 : nombres complexes, comportement asymptotique des fonctions

I - 1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + \left(1 - \sqrt{3}\right) z - \sqrt{3} = 0$.

2°) a) Résoudre l'équation $z^2 + z + 1 = 0$. En déduire les solutions de l'équation $z + \dfrac{1}{z} = -1$.

b) Résoudre l'équation $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$. En déduire les solutions de l'équation $z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{3}$.

3°) Soit $f(z) = z^4 + \left(1 - \sqrt{3}\right) z^3 + \left(2 - \sqrt{3}\right) z^2 + \left(1 - \sqrt{3}\right) z + 1$.

a) Montrer que si $f(z) = 0$ (avec $z \neq 0$), alors $f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$.

b) Montrer que pour tout $z \neq 0$, $\dfrac{f(z)}{z^2} = \left(z + \dfrac{1}{z}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{3}\right)\left(z + \dfrac{1}{z}\right) - \sqrt{3}$.

c) En déduire les solutions de l'équation $f(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

II - On considère un complexe u différent de 1, de module 1.

1°) Citer deux méthodes pour montrer qu'un nombre complexe est réel.

2°) Montrer que $\dfrac{1}{u} = \overline{u}$.

3°) Montrer que pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, $\dfrac{z - u\overline{z}}{1 - u}$.

III - On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 3x + 1}$.

1°) Déterminer son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$.

2°) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Que peut-on en déduire ?

3°) A priori, combien d'asymptotes verticales peut-on envisager ?

4°) Déterminer les limites de f en $\frac{1}{2}$ à gauche et à droite. Qu'en déduit-on ?

5°) Quel est le problème posé par la limite en 1 ? À l'aide de votre calculatrice, que pouvez-vous conjecturer quant-à la limite de f en 1 ?

6°) Montrer que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = \dfrac{3x + 1}{2x - 1}$.

7°) En déduire la limite de f en 1.

IV - a) Étudier la limite de $\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$ lorsque x tend vers 0.

b) Étudier la limite de $\sqrt{4x^2 - x + 1} - x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Corrigé du DS n°1 : nombres complexes, comportement asymptotique des fonctions

I - 1°) Le discriminant est $\Delta = \left(1-\sqrt{3}\right)^2 + 4\sqrt{3} = 1 - 2\sqrt{3} + 3 + 4\sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = \left(1+\sqrt{3}\right)^2$.

Les solutions de l'équation $z^2 + \left(1-\sqrt{3}\right)z - \sqrt{3} = 0$ sont donc

$$z_1 = \frac{-1+\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{3}\right)}{2} = -1 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1+\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)}{2} = \sqrt{3}$$

2°) a) Le discriminant est ici -3. L'équation $z^2+z+1=0$ a donc deux racines complexes conjuguées :

$$z_1' = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

Ce sont aussi les solutions de l'équation $z + \frac{1}{z} = -1$, puisque

$$z + \frac{1}{z} = -1 \iff \frac{z^2+z+1}{z} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} z^2+z+1=0 \\ z \neq 0 \end{array} \right.$$

b) Ici, le discriminant est -1, on trouve deux nouvelles racines complexes conjuguées :

$$z_3' = \frac{\sqrt{3}-i}{2} \quad \text{et} \quad z_4' = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

qui sont aussi les solutions de l'équation $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$.

3°) a) Supposons $f(z) = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{1}{z}\right) &= \left(\tfrac{1}{z}\right)^4 + \left(1-\sqrt{3}\right)\left(\tfrac{1}{z}\right)^3 + \left(2-\sqrt{3}\right)\left(\tfrac{1}{z}\right)^2 + \left(1-\sqrt{3}\right)\left(\tfrac{1}{z}\right) + 1 \\ &= \frac{1}{z^4}\left(1 + \left(1-\sqrt{3}\right)z + \left(2-\sqrt{3}\right)z^2 + \left(1-\sqrt{3}\right)z^3 + z^4\right) \\ &= \frac{f(z)}{z^4} = 0 \end{aligned}$$

Ceci provient, comme on le voit, du caractère "symétrique" des coefficients du polynôme f.

b) Comme toujours, il suffit de choisir le terme duquel on part :

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(1-\sqrt{3}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right) - \sqrt{3} = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} + \left(1-\sqrt{3}\right)z + \left(1-\sqrt{3}\right)\frac{1}{z} - \sqrt{3} = \frac{f(z)}{z^2}$$

c) L'équation $f(z) = 0$ n'a pas pour solution 0, elle est donc équivalente à l'équation $\frac{f(z)}{z^2} = 0$. Cette nouvelle équation s'écrit, d'après ce qui précède, par "changement d'inconnue" :

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{z^2} = 0 &\iff \left\{ \begin{array}{l} Z^2 + \left(1-\sqrt{3}\right)Z - \sqrt{3} = 0 \\ Z = z + \frac{1}{z} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} Z \in \left\{-1; \sqrt{3}\right\} \\ Z = z + \frac{1}{z} \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} z + \frac{1}{z} = -1 \\ \text{ou} \\ z + \frac{1}{z} = \sqrt{3} \end{array} \right. \\ &\iff z \in \left\{ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}-i}{2}; \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right\} \end{aligned}$$

II - 1°) Un nombre complexe est réel si

- sa partie imaginaire est nulle,
- il est égal à son conjugué.

2°) $\dfrac{1}{u} = \dfrac{\overline{u}}{u\overline{u}} = \dfrac{\overline{u}}{|u|^2} = \overline{u}$ puisque $|u| = 1$ par hypothèse.

3°) Utilisons le deuxième critère ci-dessus :

$$\overline{\frac{z - u\overline{z}}{1-u}} = \frac{\overline{z} - \overline{u}z}{1-\overline{u}} = \frac{\overline{z} - \frac{1}{u}z}{1-\frac{1}{u}} = \frac{u\overline{z} - z}{u-1} = \frac{z - u\overline{z}}{1-u}$$

donc $\dfrac{z - u\overline{z}}{1-u}$ est réel pour tout complexe z.

III - 1°) Le dénominateur $2x^2 - 3x + 1$ se factorise comme suit :

$$2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x^2 - \tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{2}\right) = 2\left(\left(x - \tfrac{3}{4}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^2\right) = 2\left(x-1\right)\left(x - \tfrac{1}{2}\right)$$

Ainsi, $\mathscr{D}_f = \left]-\infty; \tfrac{1}{2}\right[\cup \left]\tfrac{1}{2}; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[= \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{1}{2}; 1\right\}$.

2°) On trouve rapidement, par application du théorème sur la limite d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$$

et de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{3}{2}$.

On en déduit que la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{3}{2}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

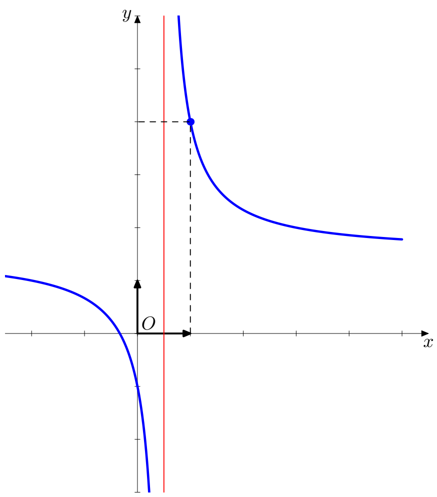
3°) f n'est pas définie en $\frac{1}{2}$ et en 1, on peut donc *a priori* s'attendre à la présence de deux asymptotes verticales à la courbe de f.

4°) Le dénominateur s'annule en $\frac{1}{2}$, et est de signe positif à gauche, et négatif à droite de $\frac{1}{2}$. le numérateur admet pour limite $-\frac{5}{4}$. On en déduit :

$$\lim_{\substack{x\to 1/2 \\ x<1/2}} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 1/2 \\ x>1/2}} f(x) = +\infty$$

La courbe représentative de f admet donc une asymptote verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$.

5°) Le dénominateur s'annule en 1... et le numérateur aussi ! On "tombe" donc sur la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ lorsqu'on cherche la limite de f en 1.



On constate sur le graphique l'absence de branche infinie au voisinage de 1.

6°) Le fait que le numérateur s'annule en 1 indique la présence d'un facteur $(x-1)$, qui va compenser celui présent au dénominateur.

Ainsi, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$:

$$f(x) = \frac{3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)} = \frac{3x+1}{2x-1}$$

7°) On en déduit :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{3x+1}{2x-1} = 4$$

ce qui confirme l'absence de branche infinie en 1.

IV - a) On va utiliser la limite classique : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$. Par composition, on a donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{\sin 3x}{3x} = 3 \lim_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = 3$$

et de même $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5$. Or, pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}$$

Le numérateur a pour limite 3, le dénominateur pour limite 5, donc par application du théorème de limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \frac{3}{5}$$

b) Attention à ne pas identifier trop rapidement cet exercice avec un exercice de recherche d'une asymptote à la fonction $x \mapsto \sqrt{4x^2-x+1}$. Les calculs sont ici bien plus simples, parce que $\sqrt{4x^2-x+1}$ et x ne tendent pas vers $+\infty$ à la même "vitesse". Factorisons simplement x^2 dans le radical (en supposant $x > 0$, ce qui est possible puisqu'on cherche la limite en $+\infty$:

$$\sqrt{4x^2-x+1} - x = \sqrt{x^2\left(4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} - x = x\left(\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1\right)$$

Or, par composition de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{4} = 2$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1 = 1$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. D'après le théorème sur la limite d'un produit, on en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2-x+1} - x = +\infty$$