Corrigé de la préparation du devoir du 30 septembre 2008

Partie "complexes"

I 1°) Il suffit de remplacer z par $-i$, et d'utiliser $i^2 = -1$ et $i^3 = -i$:

$$(-i)^3 + (-8+i)(-i)^2 + (17-8i)z + 17i = i + 8 - i - 17i - 8 + 17i = 0$$

donc $-i$ est bien solution de (E).

2°) On en déduit que $(z+i)$ doit apparaître dans la factorisation du polynôme $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$.

$$(z+i)\left(az^2 + bz + c\right) = az^3 + (b+ia)z^2 + (c+ib)z + ic$$

On obtient donc les conditions :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + ia = -8 + i \\ c + ib = 17 - 8i \\ ic = 17i \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 17 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)\left(z^2 - 8z + 17\right)$.

3°) On en déduit la résolution de l'équation (E) :

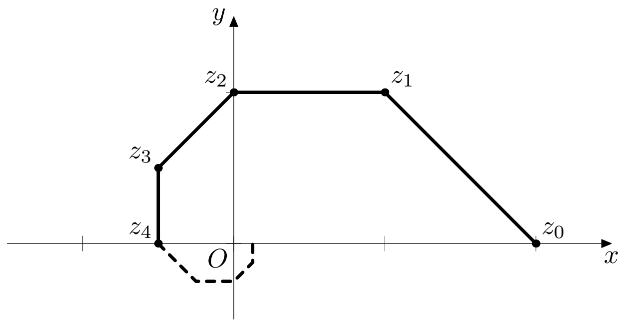
$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0 \iff (z+i)\left(z^2 - 8z + 17\right) = 0 \iff z + i = 0 \text{ ou } z^2 - 8z + 17 = 0$$

Reste à résoudre l'équation $z^2 - 8z + 17 = 0$. Son discriminant est $(-8)^2 - 4 \times 17 = -4$, donc ses racines sont $\dfrac{8 - i\sqrt{4}}{2} = 4 - i$ et $4 + i$.

Les solutions de (E) sont donc $-i$, $4-i$ et $4+i$.

II 1°) $z = 1 = \frac{1+i}{2} z_0 = 1 + i$, $z_2 = \frac{1+i}{2} z_1 = i$, $z_3 = \frac{1+i}{2} z_2 = \frac{i-1}{2}$ et $z_4 = \frac{1+i}{2} z_3 = -\frac{1}{2}$.

On remarque au passage que z_4 est réel.



2°) La suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\frac{1+i}{2} z_n\right| = \left|\frac{1+i}{2}\right| |z_n| = \frac{1}{\sqrt{2}} u_n$$

Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$, et de premier terme $u_0 = |z_0| = 2$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

3°) L'utilisation de la calculatrice est ici, faute d'outils pour résoudre l'inéquation $u_n \leqslant 0{,}1$ (outils qui seront vu plus tard dans l'année), indispensable.

On constate que la suite (u_n) est décroissante, que $u_8 > 0{,}1$ et que $u_9 < 0{,}1$. Ainsi, $n_0 = 9$.

III Toujours deux méthodes pour résoudre cette équation : soit on pose $z = x + iy$, et on sépare parties réelle et imaginaire, soit on conjugue, et on résout le système de deux équations en z et $\overline{z}$. Comme la première méthode est connue de tous les élèves, développons la deuxième :

$$\begin{cases} -3iz + \overline{z} = 3 - 6i \\ z + 3i\overline{z} = 3 + 6i \end{cases} \iff \begin{cases} \overline{z} = 3 - 6i + 3iz \\ -8z = -15 - 3i \end{cases} \iff z = \frac{15 + 3i}{8}$$

IV Pour $z \neq -2$, $z' = 1$ équivaut, en posant $z = x + iy$, à :

$$\left|\frac{(x+iy)-1}{(x-iy)+2}\right|^2 = 1 \iff \frac{(x-1)^2+y^2}{(x+2)^2+(-y)^2} = 1 \iff (x-1)^2+y^2 = (x+2)^2+y^2 \iff 3\,(2x-1)^2 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$

L'ensemble des z tels que $|z'| = 1$ est donc la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

Partie "limites"

I 1°) $f(x)$ est défini pour tout x tel que $x^2 + x - 2 \neq 0$. Les racines de l'équation $x^2 + x - 2 = 0$ sont, de façon évidente, 1 et -2. Ainsi, $\mathscr{D}_f =]-\infty;-2[\cup]-2;1[\cup]1;+\infty[$.

2°)
- Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ se déterminent avec le théorème sur la limite d'une fonction *rationnelle* en $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 3x = +\infty$$

et de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x = -\infty$.

- De $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$, on tire que $x^2 + x - 2$ est positif sur $]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$, et négatif sur $]-2;1[$. On a donc :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-} 3x^3+5x^2 = -4\\ \lim\limits_{x\to-2^-} x^2+x-2 = 0^+\end{array}\right\} \lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^+} 3x^3+5x^2 = -4\\ \lim\limits_{x\to-2^+} x^2+x-2 = 0^-\end{array}\right\} \lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$$

On en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

- De la même façon,

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} 3x^3+5x^2 = 8\\ \lim\limits_{x\to1^-} x^2+x-2 = 0^-\end{array}\right\} \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^+} 3x^3+5x^2 = 8\\ \lim\limits_{x\to1^+} x^2+x-2 = 0^+\end{array}\right\} \lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$$

De la même façon, on en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

3°) Recomposons le membre de droite pour identifier :

$$ax + b + \frac{cx+d}{x^2+x-2} = \frac{ax^3 + (a+b)\,x^2 + (-2a+b+c)\,x + d - 2b}{x^2+x-2}$$

On doit donc avoir :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 3\\ a+b = 5\\ -2a+b+c = 0\\ d-b2 = 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = 3\\ b = 2\\ c = 4\\ d = 4\end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = 3x + 2 + \dfrac{4x+4}{x^2+x-2}$.

4°) Posons $g(x) = f(x) - (3x+2)$. On a facilement :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x+4}{x^2+x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$$

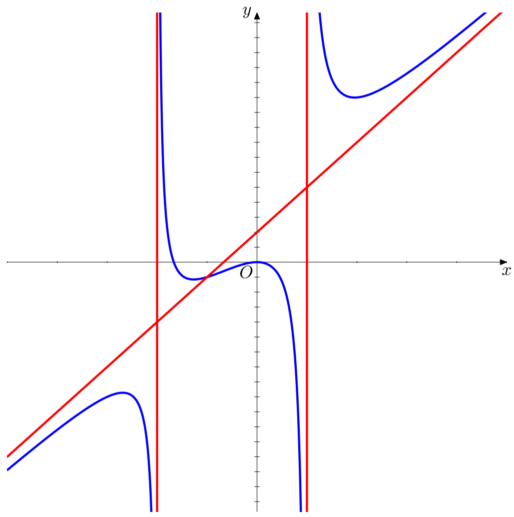
et de même $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$. On en déduit que la droite Δ d'équation $y = 3x + 2$ est asymptote à la courbe de f, en $+\infty$ et $-\infty$.

5°) L'étude de la position de la courbe de f par rapport à son asymptote Δ se ramène à l'étude du signe de la différence $g(x)$:

x	$-\infty$ -2 -1 1 $+\infty$
$4x+4$	$-$ $-$ 0 $+$ $+$
x^2+x-2	$+$ 0 $-$ $-$ 0 $+$
$g(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$ 0 $+$

Ainsi, la courbe représentative de f est en dessous de la droite Δ sur les intervalles $]-\infty;-2[$ et $]-1;1[$ et au dessus de la droite Δ sur les intervalles $]-2;-1[$ et $]1;+\infty[$.

L'observation de la courbe sur l'écran de la calculette doit confirmer tout ce qui a été démontré ici :



II $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, donc $x + \cos x \geqslant x - 1$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$, donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \cos x = +\infty$.

De $\lim\limits_{y \to +\infty} \sqrt{t} = +\infty$, on déduit, avec le théorème de comparaison, que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x + \cos x} = +\infty$.

Enfin, avec le théorème sur la limite d'un inverse, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x + \cos x}} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

III Encore une fois, nous sommes en présence d'une forme indéterminée "$\infty \times 0$". Essayons de nous ramener à une limite connue.

La forme de l'expression fait penser à $\dfrac{\sin X}{X}$. Essayons de la transformer pour la mettre sous cette forme. Pour cela, posons $X = X^2 + 1$:

$$x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = (X-1)\sin\frac{1}{X}$$

puis $Y = \frac{1}{X}$:

$$(X-1)\sin\frac{1}{X} = \left(\frac{1}{Y} - 1\right)\sin Y = (1-Y)\frac{\sin Y}{Y}$$

Or lorsque x tend vers $+\infty$, X tend aussi vers $+\infty$, donc Y tend vers 0.

On a donc $\lim\limits_{Y \to 0} \dfrac{\sin Y}{Y} = 1$, et $\lim\limits_{Y \to 0} 1 - Y = 1$, d'où :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = 1$$