

Corrigé du devoir surveillé n°3

I Partie A R.O.C.

- 1) Si M est un point quelconque de P , le triangle $MA'A$ est rectangle en A' , donc la distance AM est supérieure à la distance AA' . Ainsi, la plus courte distance de A à un point de P est AA' .
- 2) $\overrightarrow{AA'}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, donc $\left| \overrightarrow{A'A} \cdot \vec{n} \right| = \left\| \overrightarrow{AA'} \right\| \cdot \left\| \vec{n} \right\|$. Ainsi :

$$|ax_A + by_A + cz_A - a\alpha - b\beta - c\gamma| = d(A, P) \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

- 3) A' est un point de P , donc ses coordonnées vérifient $a\alpha + b\beta + c\gamma + d = 0$. Ainsi :

$$d(A, P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Partie B Application

- 1) Le rayon R de la sphère S est égal à la distance de Ω à Q , soit :

$$R = d(\Omega, Q) = \frac{|1 - (-1) + 3 - 11|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

L'équation de la sphère est donc : $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 12$.

- 2) Une façon de procéder consiste à voir le point de contact K cherché comme le projeté orthogonal de Ω sur Q . En reprenant le raisonnement ci-dessus, on a donc :

$$\overrightarrow{\Omega K} = k\vec{n}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \text{ et } \vec{n}(1; -1; 1), \text{ et } d(\Omega, Q) = \left\| \overrightarrow{\Omega K} \right\|$$

On en déduit : $\left\| \overrightarrow{\Omega K} \right\|^2 = k^2 \left\| \vec{n} \right\|^2 = d(\Omega, Q)^2$, d'où $3k^2 = 12$, et $k = \pm 2$.

Notons $k = 2\varepsilon$, avec $\varepsilon = \pm 1$. De $\overrightarrow{\Omega K} = k\vec{n}$, on déduit les coordonnées de $K : (1 + 2\varepsilon; -1 - 2\varepsilon; 3 + 2\varepsilon)$. On termine en disant que $K \in Q$, soit :

$$(1 + 2\varepsilon) - (-1 - 2\varepsilon) + (3 + 2\varepsilon) - 11 = 0 \iff -6 + 6\varepsilon = 0 \iff \varepsilon = 1$$

Ainsi, les coordonnées de K sont $(3; -3; 5)$.

- II (a) Le plan médiateur Π_{AC} de $[AC]$ est l'ensemble des points équidistants de A et C , son équation est donné par :

$$MA^2 = MC^2 \iff (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y - 1)^2 + z^2 \iff y = \frac{1}{2}$$

On trouve de la même façon l'équation du plan médiateur Π_{BC} de $[BC] : x = \frac{1}{2}$. Enfin, l'équation du plan médiateur Π_{AD} de $[AD]$ est donné par :

$$MA^2 = MD^2 \iff (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z - \alpha)^2 \iff 2x - 2\alpha z = 1 - \alpha^2$$

- (b) Le centre de la sphère S_α est le point commun aux trois plans médiateurs Π_{AC} , Π_{BC} et Π_{AD} . Ses coordonnées sont solution du système :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ 2x - 2\alpha z = 1 - \alpha^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

Les coordonnées de Ω sont donc $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\alpha}{2})$.

- (c) Le rayon de la sphère S_α est ΩA , soit :

$$r_\alpha = \Omega A = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 2}}{2}$$

La valeur minimale de ce rayon est obtenu lorsque $\alpha = 0$, elle vaut alors $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Bien entendu, ce rayon minimal ne peut être obtenu, les quatre points A , B , C et D étant dans ce cas coplanaires.

- III 1°) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} - 12 \quad \text{et} \quad f(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} - 12$$

Le tableau de variations de f est donc :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f	$-\infty$	$6\sqrt{2}-12$	$-6\sqrt{3}-12$	$+\infty$	

Or $f(-\sqrt{3}) < 0$, f ne s'annule donc pas sur $] -\infty; \sqrt{3}]$. f est continue (car dérivable) strictement croissante sur $[\sqrt{3}; +\infty[$, donc réalise une bijection strictement croissante de $[\sqrt{3}; +\infty[$ sur $[6\sqrt{3}-12; +\infty[$.

Comme l'ensemble d'arrivée contient 0, il existe un unique réel $\alpha \in [\sqrt{3}; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

On a $f(3) < 0$, $f(4) > 0$, donc $3 < \alpha < 4$, puis $f(3,5) < 0$, $f(3,6) > 0$ donc $3,5 < \alpha < 3,6$, et enfin $f(3,52) < 0$, $f(3,53) > 0$ donc $3,52 < \alpha < 3,53$.

2°) Notons $g_m(x) = f(x) - m$. Le tableau de variations de g_m se déduit facilement de celui de f :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
g'_m	$+$	0	$-$	0	$+$
g_m	$-\infty$	$6\sqrt{2}-12-m$	$-6\sqrt{3}-12-m$	$+\infty$	

Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ est exactement le nombre de fois où $g_m(x)$ s'annule. Ainsi :

- si $m < -6\sqrt{3}-12$, il y a une seule solution dans l'intervalle $] -\infty; -\sqrt{3}]$;
- si $m = -6\sqrt{3}-12$, il y a deux solutions, l'une dans l'intervalle $] -\infty; -\sqrt{3}]$, l'autre égale à $\sqrt{3}$;
- si $-6\sqrt{3}-12 < m < 6\sqrt{3}-12$, il y a trois solutions, l'une dans chacun des intervalles $] -\infty; -\sqrt{3}]$, $] -\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ et $] \sqrt{3}; +\infty[$;
- si $m = 6\sqrt{3}-12$, il y a deux solutions, l'une dans l'intervalle $] \sqrt{3}; +\infty[$, l'autre égale à $-\sqrt{3}$;
- si $m > 6\sqrt{3}-12$, il y a une seule solution, dans l'intervalle $] \sqrt{3}; +\infty[$.

IV 1°) f_0 est dérivable sur $[0; 2[$, et $f'_0(x) = 2x(2-x) - x^2 = x(4-3x)$. Le tableau de variations de f_0 est donc :

x	0	4/3	2
f'_0	+	0	-
f_0	0	32/27	0

De $f(x+2) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on déduit que f est 2-périodique, donc le graphe de f sur $[2n; 2n+2[$ se déduit de celui sur $[0; 2[$ par une translation de vecteur $2n\vec{i}$.

2°) Si $x \in [2n, 2n+2]$, alors $x-2n \in [0; 2[$, donc, d'après la périodicité de f ,

$$f(x) = f(x-2n) = (x-2n)^2(2-(x-2n)) = (x-2n)^2(2n+2-x)$$

3°) f est continue sur $]0; 2[$. En 0, la limite à droite est celle de f_0 , alors que la limite à gauche est égale à la limite à gauche de f_0 en 2, i.e. à 0. Ainsi, f est continue en 0, et par périodicité, en tout point de $\mathbb{R}$.

Par contre, on constate que, si f est continue en tout point de $\mathbb{R}$ différent de $2n$, avec $n \in \mathbb{Z}$, les points d'abscisses $2n$ sont des points anguleux. En effet :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \begin{cases} x(2-x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 & \text{si } x > 0 \\ -(x+2)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -4 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Voici pour finir la courbe représentative de f :

