Suites récurrentes

A - Suites arithmético-géométriques

1) Soit (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$, a, b et α étant trois réels donnés.
   a) Que peut-on dire si $a = 1$? Et si $b = 0$? Dans toute la suite, on exclut ces deux cas particuliers.
   b) Chercher $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + \lambda$ soit géométrique.
   c) Pour cette valeur de λ, calculer v_n en fonction de n, en déduire u_n en fonction de n.
2) Applications
   a) Soit (u_n) définie par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = 10u_n - 18$.
      i) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. Quelle conjecture pouvez-vous émettre ?
      ii) Démontrez votre conjecture par récurrence.
      iii) Retrouver ce résultat en utilisant la méthode générale exposée ci-dessus.
   b) Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{2}{3}v_n - 1$.
      i) Faire un graphique, et émettre une conjecture concernant le comportement de la suite (v_n).
      ii) Utiliser la méthode générale pour confirmer votre conjecture.

B - Suite homographique

Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$.

1) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n < 1$.
2) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
   a) Démontrer que la suite v_n est géométrique, en préciser la raison et le premier terme.
   b) En déduire l'expression de v_n, puis de u_n, en fonction de n.
   c) Trouver un entier N tel que pour tout $n > N$, $u_n > 0{,}99$.
   Quelle est la limite de (u_n) ?

C - Une suite définie par une relation de récurrence à deux étapes

Soit (F_n) la suite définie par les relations $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $(*)$ $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Chercher les suites géométriques vérifiant la relation $(*)$. On appellera ρ_1 et ρ_2 les raisons de ces suites.
2) Chercher α et β tels que $\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\rho_1 + \beta\rho_2 = 1 \end{array} \right.$.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha\rho_1^n + \beta\rho_2^n$.