Corrigé de la préparation du test du 13 septembre 2008

t1- a) Des calculs élémentaires pour commencer.

$$\frac{-4+2\,(n+1)}{3}-\frac{-4+2n}{3}=\frac{-4+2n+2+4-2n}{3}=\frac{2}{3}$$
$$\frac{\frac{1}{3}x+1}{x+3}=\frac{\frac{1}{3}\,(x+3)}{x+3}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{\frac{4x-3}{3x-2}-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{\frac{x-1}{3x-2}}-\frac{1}{x-1}=\frac{3x-2}{x-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{3x-3}{x-1}=3$$
$$\frac{2^{3n+4}}{3^{2n+5}}\times\frac{3^{2n+3}}{2^{3n+1}}=\frac{2^{3n}\times 2^4\times 3^{2n}\times 3^3}{3^{2n}\times 3^5\times 2^{3n}\times 2^1}=\frac{2^3}{3^2}=\frac{8}{9}$$

Remarquons que l'égalité de la deuxième ligne n'est valable que pour $x\neq -3$, et que celle de la troisième ligne n'est valable que pour $x\notin\left\{\frac{2}{3};1\right\}$.

b) Il faut ici utiliser une *expression conjuguée* :

$$\frac{1}{\sqrt{2}-3}=\frac{\sqrt{2}+3}{\left(\sqrt{2}\right)^2-3^2}=-\frac{\sqrt{2}+3}{5}$$

c) Un autre calcul élémentaire :

$$2^{3n}+2^{3n+2}\times 5=2^{3n}+2^{3n}\times 2^2\times 5=2^{3n}\,(1+20)=21\times 2^{3n}$$

t2- Utilisons la décomposition canonique :

$$A\,(x)=3\left(x^2-\tfrac{1}{3}x-1\right)=3\left[\left(x-\tfrac{1}{6}\right)^2-\tfrac{37}{36}\right]=3\left(x-\tfrac{1-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x-\tfrac{1+\sqrt{37}}{6}\right)$$

On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{37}}{6}$		$\frac{1+\sqrt{37}}{6}$		$+\infty$
$x-\frac{1-\sqrt{37}}{6}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\frac{1+\sqrt{37}}{6}$		$-$		$-$	0	$+$	
$A\,(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut aussi trouver les deux racines $\frac{1\pm\sqrt{37}}{6}$ avec les formules du cours, après avoir calculé le *discriminant* $\Delta=(-1)^2-4\times 3\times(-3)=37$.

Le trinôme $A\,(x)$ est alors du signe de son coefficient dominant, sauf lorsque x se trouve entre les deux racines. Ce théorème évite la composition du tableau de signes précédent.

t3- Il y a deux manières de résoudre cette inéquation, l'une beaucoup plus simple que l'autre !

- On transforme l'inéquation :

$$\frac{x^2-1}{x+1}\geqslant 3x-2\iff\frac{x^2-1}{x+1}-(3x-2)\geqslant 0\iff\frac{-2x^2-x+1}{x+1}\geqslant 0$$

  Reste à trouver le signe de $-2x^2-x+1=-2\,(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$, et à mettre tout cela dans un tableau de signes.

- En fait, la présence du facteur $x+1$ au numérateur du résultat précédent incite à d'abord simplifier la fraction de gauche par $x+1$. On n'oubliera pas à la fin d'exclure éventuellement -1 de l'ensemble de solutions. L'inéquation se simplifie en :

$$x-1\geqslant 3x-2\iff x\leqslant\frac{1}{2}$$

  L'ensemble des solutions est donc $]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;\frac{1}{2}[$.

t4- Deux résultats à connaître par cœur, de manière à le reconnaître dans toutes les positions :

- $u_n=u_1+(n-1)\,r=-2+3\,(n-1)=3n-5$ (ici, la seule difficulté est que le terme initial donné est u_1 plutôt que u_0.
- $v_n=v_0\times r^n=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

t5- Cet exercice est le même que le précédent vu dans un miroir. Il s'agit ici de donner de u_n (resp. v_n) une écriture de la forme $u_0 + nr$ (resp. $v_0.r^n$) caractéristique d'une suite arithmétique (resp. géométrique). Cela est plus efficace que le calcul de $u_{n+1} - u_n$ (resp. $\frac{v_{n+1}}{v_n}$).

- $u_n = \frac{1-3n}{2} = \frac{1}{2} + n\left(-\frac{3}{2}\right)$, donc (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et de raison $r = -\frac{3}{2}$, et $u_{n+1} = u_n - \frac{3}{2}$.
- $v_n = \dfrac{3^{2n}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{9}{2}\right)^n$, donc (v_n) est une suite géometrique de premier terme $v_0 = \frac{1}{2}$ et de raison $r = \frac{9}{2}$, et $v_{n+1} = \frac{9}{2}v_n$.

t6- Deux autres formules à connaître.

- $u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$ est une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique. Le cours nous dit qu'elle vaut $20 \times \frac{u_1+u_{20}}{2}$, or $u_{20} = -2 + 3 \times 19 = 55$, donc la somme cherchée vaut 530.
- Même travail avec une suite géométrique. $v_1 + v_2 + \cdots + v_7 = v_1 \times \dfrac{1-r^7}{1-r} = -2 \times \dfrac{1-3^7}{1-3} = -2186$.

t7- Un théorème d'application simple :

$$\lim_{x\to+\infty} -3x^5 + 2x^4 + 1515x - 17 = \lim_{x\to+\infty} -3x^5 = -\infty$$

et de même

$$\lim_{x\to-\infty} -3x^5 + 2x^4 + 1515x - 17 = \lim_{x\to-\infty} -3x^5 = +\infty$$

t8- Attention à ne pas confondre les situations ! Le théorème du cours sur la limite d'une fraction rationnelle ne s'applique qu'en $\pm\infty$!

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2 - 10x + 1}{-x^3 + x - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{-x^3} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{3}{x} = 0$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to2^+} x^2 + 5x - 3 = 11$, et[1] $\displaystyle\lim_{x\to2^+} 2 - x = 0^-$, donc $\displaystyle\lim_{x\to2^+} \frac{x^2+5x-3}{2-x} = -\infty$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to2^-} 2 - x = 0^+$, donc $\displaystyle\lim_{x\to2^-} \frac{x^2+5x-3}{2-x} = +\infty$. Les limites n'étant pas identiques en 2^+ et 2^-, $\dfrac{x^2+5x-3}{2-x}$ n'admet pas de limite en 2.

t9- Voici un exercice extrêmement classique, qu'il faut savoir faire rapidement.

(a) Faisons les choses dans le sens dans lequel les calculs sont faciles :

$$ax + b + \frac{c}{x+2} = \frac{ax^2 + (2a+b)\,x + (2b+c)}{x+2}$$

donc cette expression est égale à $g(x)$ pour tout $x \neq -2$ si et seulement si

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 3 \\ 2b + c = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Ainsi[2], $g(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x+2}$ pour tout $x \neq -2$.

(b) Pour tout $x \neq -2$, on a : $g(x) - (x+1) = \dfrac{1}{x+2}$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) - (x+1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+2} = 0$$

ce qui signifie bien que la droite $\Delta : y = x + 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$. On peut même, en constatant que $g(x) - (x+1)$ est positif pour $x \geqslant -2$, que la courbe $\mathscr{C}_g$ au voisinage de $+\infty$.

[1] ou bien, $\displaystyle\lim_{x\to2^+} 2 - x = 0$ avec $2 - x$ négatif.

[2] Une façon de vérifier les valeurs de a et b consiste à jeter un œil à la question suivante !